

Lineáris algebra
VEMKMA1143V L1
2019. január 25.

Név:.....
Szak:.....
Neptun kód:.....

Elméleti kérdések

1. Mit jelentenek az alábbi fogalmak: lineárisan független vektorhalmaz, generátorrendszer, bázis. (3 pont)
2. Mit értünk egy $n \times n$ -es mátrix determinánsán? Milyen tulajdonságai vannak a nemszinguláris mátrixoknak? (4 pont)
3. Írja fel a lineáris egyenletrendszerek általános, részletes alakját! Mi a megoldhatóság szükséges és elégséges feltétele?
Mikor van egy inhomogén lineáris egyenletrendszernek egyértelmű megoldása és mikor van végtelen sok megoldásvektora? (5 pont)
4. Mit értünk lineáris transzformáció sajátértékén és sajátvektorán? Mi a karakterisztikus egyenlet? (3 pont)
5. Mit értünk két R^n -beli vektor skaláris szorzatán? Ismertesse a skaláris szorzás alaptulajdonságait! Mit értünk egy R^n -beli vektor normáján? Mikor mondjuk, hogy két R^n -beli vektor ortogonális? (5 pont)

Feladatok

1. $\underline{a}_1 := (1, 0, 3, 2)$; $\underline{a}_2 := (0, 0, 1, 0)$; $\underline{a}_3 := (1, 1, 2, 1)$;
 $\underline{a}_4 := (0, 1, 3, 5)$; $\underline{a}_5 := (3, 2, 13, 10)$. $H := \{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \underline{a}_4, \underline{a}_5\}$
Bázistranszformációt alkalmazva válaszoljon az alábbi kérdésekre! (Indoklás!)
a) Határozza meg a H vektorhalmaz rangját!
b) Van-e olyan vektor az \mathfrak{R}^4 vektortérben, amely nem állítható elő a H vektorainak lineáris kombinációjával?

(5 pont)

$$2. \quad A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}; \quad B := \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}; \quad C := \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}; \quad D := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

a) Melyik létezik az alábbi mátrixok közül? Amelyik létezik, azt számítsa ki!

$$B \cdot A \cdot B^T, \quad B^T \cdot A^T \cdot C, \quad B^T \cdot (B \cdot B^T + 2D)$$

b) Határozza meg a D mátrix determinánsát! Invertálható-e a D mátrix?

c) Határozza meg a D mátrix inverzét!

(8 pont)

3.

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ x_2 - x_3 + x_4 &= 1 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 + 9x_4 &= 13 \end{aligned}$$

a) Oldja meg bázistranszformációt alkalmazva a fenti lineáris egyenletrendszert! Van-e két különböző megoldásvektora az egyenletrendszernek? Ha igen, akkor adjon meg két megoldásvektort!

b) Adja meg az egyenletrendszer homogén párjának a megoldáshalmazát!

(6 pont)

3. Tekintsük az alábbi lineáris transzformációt!

$$\mathcal{A}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x_1, x_2) \mapsto (2x_1 - x_2, x_1 + 4x_2)$$

a) Injektív-e az \mathcal{A} lineáris transzformáció? Ha igen, akkor adja meg az inverz transzformáció típusát és hozzárendelési szabályát!

b) Adja meg az \mathcal{A} lineáris transzformáció magterét!

c) Határozza meg a fenti lineáris transzformáció sajátértékeit, sajátaltéréit! Adja meg a sajátértékek algebrai és geometriai multiplicitását! Adjon meg egy sajátvektort!

(4+1+6 pont)