

Lineáris algebra

VEMKMA1143v L1 levelező

2019. január 4.

Név:.....

Szak:.....

Neptun kód:.....

### Elméleti kérdések

1. Mit jelentenek az alábbi fogalmak: lineárisan független vektorhalmaz, lineárisan összefüggő vektorhalmaz, vektorhalmaz rangja?  
Milyen állításokat ismer lineárisan független vektorhalmazokra vonatkozóan? (4pont)
2. Mikor mondjuk azt, hogy egy négyzetes mátrix invertálható? Mi az invertálhatóság szükséges és elégséges feltétele? (Két feltételt adjon meg!) Mi a bázistranszformációval történő mátrixinvertálás lényege? (5 pont)
3. Foglalja össze, hogy egy homogén illetve egy inhomogén lineáris egyenletrendszernek mikor nincs megoldása, mikor van egy megoldásvektora és mikor van végtelen sok megoldásvektora! (4 pont)
4. Mit értünk lineáris leképezésen illetve lineáris transzformáción? Mit értünk lineáris leképezés magterén és mátrixán? (4 pont)
5. Mit értünk lineáris transzformáció sajátértékén és sajátvektorán? Mi a karakterisztikus egyenlet? mire használjuk? (3 pont)

### Feladatok

1.  $\underline{a}_1 := (1, 2, 0, 3)$ ;       $\underline{a}_2 := (0, 0, 0, 1)$ ;       $\underline{a}_3 := (0, 4, 4, 0)$ ;  
 $\underline{a}_4 := (3, 2, 4, 5)$ ;       $\underline{a}_5 := (2, 8, 4, 10)$        $H := \{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \underline{a}_4, \underline{a}_5\}$

Bázistranszformációt alkalmazva válaszoljon az alábbi kérdésekre! (Indoklás!)

a) Határozza meg a  $H$  vektorhalmaz rangját!

b) Van-e a  $H$  vektorhalmaznak 4 vektorból álló lineárisan független részhalmaza, illetve 4 vektorból álló lineárisan összefüggő részhalmaza?

(5 pont)

$$2. \quad A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}; \quad B := \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}; \quad C := \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}; \quad D := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

a) Melyik létezik az alábbi mátrixok közül? Amelyik létezik, azt számítsa ki!

$$B \cdot A \cdot B^T, \quad B^T \cdot A^T \cdot C, \quad B^T \cdot (B \cdot B^T + 2D)$$

b) Határozza meg a  $D$  mátrix determinánsát! Invertálható-e a  $D$  mátrix?

(5 pont)

3.

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &= 3 \\ x_2 + x_3 &= -1 \\ 3x_1 + 4x_2 + 10x_3 &= -1 \\ 2x_1 + 4x_3 &= 2 \end{aligned}$$

a) Oldja meg bázistranszformációt alkalmazva a fenti lineáris egyenletrendszert! Van-e két különböző megoldásvektora az egyenletrendszernek? Ha igen, akkor adjon meg két megoldásvektort!

b) Adja meg az egyenletrendszer homogén párjának a megoldáshalmazát!

(6 pont)

4. Tekintsük az alábbi lineáris transzformációt!

$$A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x_1, x_2) \mapsto (4x_1 - x_2, x_1 + 6x_2)$$

a) Injektív-e az  $A$  lineáris transzformáció? (Indoklás!) Ha igen, akkor határozza meg az inverz transzformáció mátrixát, majd adja meg az inverz transzformáció típusát és hozzárendelési szabályát!

b) Határozza meg a fenti lineáris transzformáció sajátértékeit, sajátaltereit! Adja meg a sajátértékek algebrai és geometriai multiplicitását!

Adjon példát egy sajátvektorra!

(5+6 pont)

5. Legyen  $\underline{x} = (0, 2, 4, 6)$ ,  $\underline{b} = (-1, -1, 1, 1)$ .

a) Adja meg az  $\underline{x}$  vektor  $\underline{b}$ -re vonatkozó Fourier-együtthatóját!

b) Bontsa fel az  $\underline{x}$  vektort  $\underline{b}$ -vel párhuzamos és  $\underline{b}$ -re merőleges összetevőkre!

(3 pont)