4. fejezet

Egyváltozós valós függvények integrálszámítása

4.1. Primitív függvény és határozatlan integrál

4.1.1. Definíció. Legyen $I \subset \mathbb{R}$ intervallum és f egy I-n definiált valós függvény. Az $F : I \to \mathbb{R}$ függvényt f *primitív függvényének* mondjuk az I intervallumon, ha F differenciálható I-n és itt $F'_I = f$.

Emlékeztetőül: F'_I az F függvény I-n vett deriváltját jelöli (lásd 3.5.1 Definíció).
A következő tulajdonság Lagrange tételének következménye.

4.1.2. Tétel. *Ha F az f függvény primitív függvénye az I intervallumon, akkor minden $c \in \mathbb{R}$ esetén $F+c$ is primitív függvénye f-nek I-n, és f bármely primitív függvénye I-n $F+c$ alakú, ahol $c \in \mathbb{R}$.*

4.1.3. Definíció. Egy f valós függvény *határozatlan integrálján* az $I \subset \mathbb{R}$ intervallumon f I-n vett primitív függvényeinek halmazát értjük (ha nem üres). Jelölés: $\int f$ vagy $\int f(x)\,dx$. Az f függvényt *integrandusnak* nevezzük.

Ha F primitív függvénye f-nek I-n, akkor

$$\int f = \{\, F + c \mid c \in \mathbb{R} \,\} \qquad I\text{-n.}$$

Ezt a következő pontatlan, de rövidsége miatt kényelmes és ezért általánosan használt alakban szokás írni:

$$\int f = F + c, \qquad (\text{az } I \text{ intervallumon}),$$

vagy

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c, \qquad (x \in I).$$

Mivel

$$\left(\frac{x^2}{2}\right)' = x, \qquad x \in (-\infty, \infty),$$

ezért

$$\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + c, \qquad x \in (-\infty, \infty).$$

4.2. Alapintegrálok

A differenciálási szabályok megfordításával kapjuk a következő integrálokat.

$\int f(x)\,dx$	$F(x)+c$
$\int x^b\,dx$	$\frac{x^{b+1}}{b+1}+c$
$\int \frac{1}{x}\,dx$	$\ln\lvert x\rvert + c$
$\int e^x\,dx$	$e^x + c$
$\int a^x\,dx$	$\frac{a^x}{\ln a}+c$
$\int \sin x\,dx$	$-\cos x + c$
$\int \cos x\,dx$	$\sin x + c$
$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx$	$\operatorname{tg} x + c$
$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx$	$-\operatorname{ctg} x + c$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$	$\arcsin x + c$
$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx$	$\operatorname{arctg} x + c$

$$(b \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \quad a \in (0,\infty) \setminus \{1\})$$

A táblázatban szereplő integrálformulák érvényesek minden olyan nyílt intervallumon, ahol f és a jobb oldalon szereplő függvény értelmezve van.

4.3. Integrálás elemi átalakításokkal

4.3.1. Tétel (Linearitás). *Ha f-nek és g-nek primitív függvénye az $(a,b) \subset \mathbb{R}$ intervallumon F, illetve G, továbbá $k \in \mathbb{R}$, akkor (kf)-nek primitív függvénye (a,b)-n kF, $(f+g)$-nek* *pedig $F+G$. Eszerint*

$$\int (kf) = k\int f,$$
$$\int (f+g) = \int f + \int g.$$

Az első képletet úgy kell érteni, hogy az $\int(kf)$ függvényhalmaz elemei az $\int f$ függvényhalmaz elemeinek k-szorosai, a második képletet pedig úgy, hogy az $\int(f+g)$ függvényhalmaz elemei az $\int f$ és $\int g$ függvényhalmaz elemeinek összeadásával állnak elő. Hasonlóképpen értendők a további határozatlan integrálokkal kapcsolatos képletek is.

4.3.2. Tétel (Lineáris helyettesítés). *Legyen f-nek az $(\alpha,\beta)\subset\mathbb{R}$ intervallumon primitív függvénye F, továbbá $g(x)=ax+b$ lineáris függvény, a, $b\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$, és (γ,δ) olyan intervallum, hogy $g((\gamma,\delta))\subset(\alpha,\beta)$. Ekkor az $f\circ g$ függvénynek (γ,δ)-n primitív függvénye $\frac{1}{a}(F\circ g)$, azaz*

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+c, \qquad x\in(\gamma,\delta).$$

4.3.3. Példa.

$$\int\sqrt{3x+5}\,dx = \int(3x+5)^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{1}{3}\frac{(3x+5)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+c = \frac{2}{9}\sqrt{(3x+5)^3}+c,$$

ahol $x\in(-\frac{5}{3},\infty)$.

4.3.4. Példa.

$$\int\cos^2 x\,dx = \int\frac{1+\cos 2x}{2}\,dx = \int\left(\frac{1}{2}+\frac{\cos 2x}{2}\right)dx$$
$$= \frac{1}{2}\int 1\,dx + \frac{1}{2}\int\cos 2x\,dx = \frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\frac{\sin 2x}{2}+c = \frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}+c,$$

ahol $x\in(-\infty,\infty)$.

4.4. Parciális integrálás

A szorzat deriváltjából könnyen levezethető a következő tétel.

4.4.1. Tétel (Parciális integrálás). *Legyen $(a,b)\subset\mathbb{R}$. Ha f és g differenciálhatók (a,b)-n és az fg' függvénynek van primitív függvénye (a,b)-n, akkor az $f'g$ függvénynek is van primitív függvénye (a,b)-n, és*

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x)-\int f(x)g'(x)\,dx, \qquad x\in(a,b).$$

4.4.2. Példa.

$$\int(\cos x)x\,dx = \int(\sin x)'x\,dx = (\sin x)x - \int(\sin x)1\,dx = (\sin x)x + \cos x + c,$$

ahol $x \in (-\infty, \infty)$.

4.5. Integrálás helyettesítéssel

Az alábbi tétel az összetett függvény differenciálási szabályából következik.

4.5.1. Tétel (1. típusú helyettesítés). *Legyen g differenciálható és nem állandó az* $(a, b) \subset \mathbb{R}$ *intervallumon. Ha F primitív függvénye f-nek a* $g((a, b))$ *intervallumon, akkor* $F \circ g$ *primitív függvénye f-nek* (a, b)*-n, azaz*

$$\int(f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)) + c, \qquad x \in (a, b),$$

avagy

$$\int(f(g(x))g'(x)\,dx = \left[\int f(u)\,du\right]_{u=g(x)}.$$

Ez utóbbi képlethez formálisan úgy is eljuthatunk, hogy a bal oldali integrálban bevezetjük az $u = g(x)$ helyettesítést, majd a $\frac{du}{dx} = g'(x)$ képletből a $g'(x)\,dx = du$ összefüggést származtatjuk, és így jutunk a jobb oldalon látható integrálhoz.

4.5.2. Példa. Az

$$\int(\sin^2 x)\cos x\,dx$$

integrálból az $u = \sin x$ helyettesítéssel, amikor $\frac{du}{dx} = \cos x$, s így $\cos x\,dx = du$, az

$$\left[\int u^2\,du\right]_{u=\sin x}$$

integrált kapjuk. Mivel

$$\int u^2\,du = \frac{u^3}{3} + c,$$

ezért

$$\int(\sin^2 x)\cos x\,dx = \frac{\sin^3 x}{3} + c, \qquad x \in (-\infty, \infty).$$

4.5.3. Tétel (2. típusú helyettesítés). *Tegyük fel, hogy g differenciálható az* $(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$ *intervallumon és* g' *sehol sem tűnik el* (α, β)*-n. Ha H primitív függvénye* $(f \circ g)g'$*-nek* (α, β)*-n, akkor* $H \circ g_{-1}$ *primitív függvénye f-nek a* $g((\alpha, \beta))$ *intervallumon, azaz*

$$\int f(x)\,dx = \left[\int(f(g(u)))g'(u)\,du\right]_{u=g_{-1}(x)}, \qquad x \in g((\alpha, \beta)).$$

A képlethez formálisan úgy juthatunk el, hogy a bal oldali integrálban elvégezzük az $x = g(u)$ helyettesítést, majd a $\dfrac{dx}{du} = g'(u)$ összefüggésből a $dx = g'(u)\,du$ kifejezést származtatjuk, végül megkapjuk a jobb oldali integrált. Ennek kiszámítása után u helyébe $g_{-1}(x)$-et kell írunk.

4.5.4. Példa. Az

$$\int x\sqrt[3]{x-1}\,dx$$

integrálból az $x = u^3 + 1$ helyettesítéssel a $\dfrac{dx}{du} = 3u^2$ és $dx = 3u^2du$ kifejezéseket használva az

$$\int (u^3+1)u\,3u^2\,du = 3\int (u^6+u^3)\,du$$

integrált kapjuk. Ezt már ki tudjuk számítani:

$$3\int (u^6+u^3)\,du = 3\left(\frac{u^7}{7}+\frac{u^4}{4}\right)+c = \frac{3}{7}u^7+\frac{3}{4}u^4+c.$$

Végül az $x = u^3 + 1$ összefüggésből nyert $u = \sqrt[3]{x-1}$ felhaszálásával kapjuk, hogy

$$\int x\sqrt[3]{x-1}\,dx = \frac{3}{7}\left(\sqrt[3]{x-1}\right)^7+\frac{3}{4}\left(\sqrt[3]{x-1}\right)^4+c, \qquad x\in(-\infty,\infty).$$

4.6. A Riemann-integrál definíciója

Adott egy nemnegatív folytonos f az $[a, b] \subset \mathbb{R}$ intervallumon. Kiszámítandó annak a „görbevonalú” trapéznak a T területe, amelyet felülről az $y = f(x)$ görbe, oldalról az $x = a$ és $x = b$ egyenesek, alulról pedig az x-tengely határol. Az alábbiakban definiált fogalmak segítségével alsó és felső becslést adhatunk T-re. A konstrukció abban az általánosabb esetben is használható, amikor f csupán korlátos $[a, b]$-n.

4.6.1. Definíció. Az $[a, b] \subset \mathbb{R}$ intervallum *felosztásán* olyan véges $\{x_0, \dots, x_k\}$ sorozatot értünk, amelyre

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b.$$

4.6.2. Definíció. Legyen adva egy korlátos f függvény az $[a, b]$ intervallumon és $\Phi = \{x_0, \dots, x_k\}$ legyen $[a, b]$ egy felosztása. A korlátosság miatt minden $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ esetén az

$$m_i = \inf f([x_{i-1}, x_i]), \qquad M_i = \sup f([x_{i-1}, x_i])$$

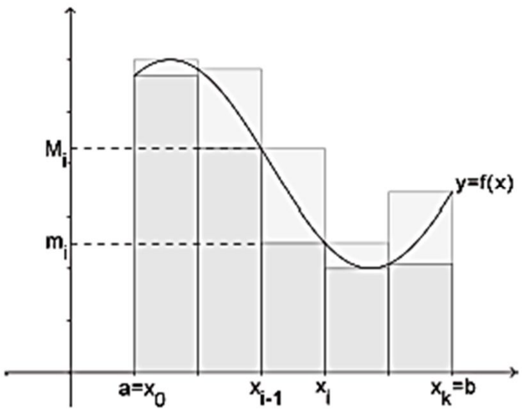
számok jól definiáltak. Az

$$s_\Phi = \sum_{i=1}^{k} m_i(x_i - x_{i-1})$$

összeget az f függvény Φ felosztáshoz tartozó *alsó összegének* , az

$$S_\Phi = \sum_{i=1}^{k} M_i(x_i - x_{i-1})$$

összeget az f függvény Φ felosztáshoz tartozó *felső összegének* nevezzük (lásd a 4.1 ábra).



4.1. ábra.

Ha f korlátos $[a,b]$-n, akkor $[a,b]$ bármely Φ felosztására

$$\inf f([a,b]) \cdot (b-a) \leq s_\Phi \leq S_\Phi \leq \sup f(([a,b]) \cdot (b-a).$$

4.6.3. Definíció. Bármely $[a,b]$-n korlátos f esetén legyen

$$I_A = \sup\{ s_\Phi \mid \Phi \text{ az } [a,b] \text{ felosztása} \},$$

és

$$I_F = \inf\{ S_\Phi \mid \Phi \text{ az } [a,b] \text{ felosztása} \}.$$

Az I_A számot az f függvény *(Darboux-féle) alsó integráljának*, az I_F számot pedig f *(Darboux-féle) felső integráljának* nevezzük.

Nyilvánvaló, hogy ha f nemnegatív és folytonos $[a,b]$-n, akkor az $[a,b]$ bármely Φ felosztására

$$s_\Phi \leq T \leq S_\Phi,$$

és ezért

$$I_A \leq T \leq I_F$$

is teljesül, ahol T a kiszámítandó terület.

4.6.4. Definíció. Az f függvényt *integrálhatónak* mondjuk az $[a,b] \subset \mathbb{R}$ intervallumon, ha f korlátos $[a,b]$-n és $I_A = I_F$. Ekkor az $I = I_A = I_F$ közös értéket az f függvény $[a,b]$-n vett *Riemann-féle határozott integráljának,* vagy röviden *Riemann-integráljának* nevezzük. Jele:

$$\int_a^b f \qquad \text{vagy} \qquad \int_a^b f(x)\,dx.$$

Szükségünk lesz a következő fogalomra.

4.6.5. Definíció. Azt mondjuk, hogy az f függvény *szakaszosan folytonos (szakaszosan monoton)* az $[a,b] \subset \mathbb{R}$ intervallumon, ha $[a,b]$-nek létezik $\{x_0,\dots,x_k\}$ felosztása ($a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b$) úgy, hogy az (x_{i-1},x_i), $i \in \{1,\dots,k\}$, részintervallumok mindegyikében f folytonos (monoton).

A következő tétel azt mutatja, hogy a függvények egy igen széles osztálya integrálható.

4.6.6. Tétel (Egzisztencia tétel). *Ha f korlátos és szakaszosan folytonos vagy szakaszosan monoton az $[a,b]$ intervallumon, akkor f integrálható is $[a,b]$-n.*

Legyen f nemnegatív és folytonos $[a,b]$-n. Ekkor f integrálhatósága folytán $I_A = I_B = \int_a^b f$. Figyelembe véve, hogy $I_A \le T \le I_F$, azt kapjuk, hogy

$$T = \int_a^b f,$$

ahol T a szakasz elején említett síkidom területe.

A következő tétel azt mutatja, hogy az integrálhatóságot és az integrál értékét nem befolyásolja, ha az integrandust véges számú pontban megváltoztatjuk.

4.6.7. Tétel. *Legyenek f és g az $[a,b] \subset \mathbb{R}$ intervallumon definiált valós függvények. Ha f integrálható az $[a,b]$-n, és van $[a,b]$-nek olyan véges H részhalmaza, hogy $f = g$ az $[a,b] \setminus H$ halmazon, akkor g is integrálható $[a,b]$-n, és*

$$\int_a^b g = \int_a^b f.$$

Ez a tétel motiválja az alábbi definíciót.

4.6.8. Definíció. A g függvényt az $[a,b] \subset \mathbb{R}$ intervallumon *tágabb értelemben integrálhatónak* mondjuk, ha van olyan az $[a,b]$-n integrálható f, amely g-vel $[a,b]$-n véges számú pont kivételével egyenlő. Ekkor definícióképpen

$$\int_a^b g = \int_a^b f.$$

4.6.9. Példa. A

$$g(x) = \frac{\sin x}{x}, \qquad x \in (0,1]$$

függvény ugyan nincs definiálva 0-ban, mégis tágabb értelemben integrálható a $[0,1]$-en, mivel a

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

limeszreláció folytán korlátos, és ha a 0 helyen bárhogyan definiáljuk, akkor szintén korlátos és szakaszosan folytonos függvényt kapunk.

A továbbiakban az integrálhatóságot mindig tágabb értelemben fogjuk érteni.

4.7. A Riemann-integrál tulajdonságai

A következő tételekben összefoglaljuk a Riemann-integrál fontosabb tulajdonságait.

4.7.1. Tétel. *Ha f és g integrálható az $[a,b] \subset \mathbb{R}$ intervallumon és α, β állandók, akkor $\alpha f + \beta g$ is integrálható az $[a,b]$-n, és*

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g.$$

4.7.2. Tétel. *Ha f és g integrálható az $[a,b] \subset \mathbb{R}$ intervallumon és $f \leq g$ az $[a,b]$-n, akkor*

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

4.7.3. Tétel. *Ha f integrálható az $[a,b] \subset \mathbb{R}$ intervallumon, akkor $|f|$ is integrálható az $[a,b]$-n, és*

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|.$$

4.7.4. Tétel. *Ha f integrálható az $[a,b]$ intervallumon és $c \in (a,b)$, akkor f integrálható $[a,c]$-n és $[c,b]$-n is, és*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

4.8. A Riemann-integrál kiszámítása

A Riemann-integrál kiszámítása szempontjából alapvető fontosságú a következő tétel.

4.8.1. Tétel (Newton-Leibniz-szabály). *Ha f integrálható az $[a,b] \subset \mathbb{R}$ intervallumon, F folytonos $[a,b]$-n, továbbá F primitív függvénye f-nek (a,b)-n, akkor*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

4.8.2. Definíció. Legyen $[a,b] \subset \mathbb{R}$ intervallum. Az $F(b) - F(a)$ különbséget az $[F(x)]_a^b$ szimbólummal jelöljük, és az F függvény $[a,b]$ intervallumon vett *megváltozásának* nevezzük.

A Newton-Leiniz-szabályt a Lagrange-féle középértéktétel segítségével lehet igazolni.

4.8.3. Példa. A Newton-Leibniz-szabály szerint

$$\int_2^3 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_2^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{2^3}{3} = \frac{27}{3} - \frac{8}{3} = \frac{19}{3}.$$

A parciális integrálás a következőképpen fogalmazható át határozott integrálra.

4.8.4. Tétel (Parciális integrálás). *Ha f és g folytonosan differenciálható az $[a, b] \subset \mathbb{R}$ intervallumon, akkor*

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx.$$

4.8.5. Példa.

$$\int_1^2 \ln x\,dx = \int_1^2 1 \cdot \ln x\,dx = \int_1^2 (x)' \ln x\,dx = \big[\,x \ln x\,\big]_1^2 - \int_1^2 x\frac{1}{x}\,dx$$
$$= 2\ln 2 - \int_1^2 1\,dx = 2\ln 2 - \big[\,x\,\big]_1^2 = 2\ln 2 - 1.$$

Vezessük be a következő jelölést.

4.8.6. Definíció. Bármely $a \in D(f)$ esetén legyen

$$\int_a^a f = 0,$$

továbbá $b < a$ esetén

$$\int_a^b f = -\int_b^a f,$$

feltéve, hogy f integrálható a $[b, a] \subset \mathbb{R}$ intervallumon.

4.8.7. Tétel (Integrálás helyettesítéssel). *Tegyük fel, hogy g nem állandó és folytonosan differenciálható az $[a, b] \subset \mathbb{R}$ intervallumon és f folytonos a $g([a, b])$ intervallumon. Ekkor*

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f(g(u))g'(u)\,du.$$

4.8.8. Példa. A $2 - x = u$, avagy $x = g(u) = 2 - u$ helyettesítéssel kapjuk, hogy

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{2-x}}\,dx = -\int_{g(1)}^{g(2)} \frac{x}{\sqrt{2-x}}\,dx = \int_1^2 \frac{2-u}{\sqrt{u}}\,du$$
$$= \int_1^2 \left(\frac{2}{\sqrt{u}} - \sqrt{u}\right) du = \left[4\sqrt{u} - \frac{2}{3}\sqrt{u^3}\right]_1^2 = 4(\sqrt{2} - 1) - \frac{2}{3}(\sqrt{8} - 1).$$