Hatvány, gyök, logaritmus

Összeállította: dr. Leitold Adrien
egyetemi docens

Hatványozás értelmezése

- Hatvány: a^n a: alap, n: kitevő

Hatványozás értelmezése:

- Pozitív egész kitevőre: legyen $n \in \mathbf{N}^+$, $a \in \mathbf{R}$. Ekkor:

$$a^n = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \qquad (\ n\text{-szer}\ )$$

- 0 kitevőre: legyen $a \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$. Ekkor:

$$a^0 = 1 \qquad (\ 0^0 \text{ hatványt nem értelmezzük }\ )$$

- Negatív egész kitevőre: legyen $n \in \mathbf{N}^+$, $a \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$. Ekkor:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Gyökvonás értelmezése

- Négyzetgyök: Egy nemnegatív a szám négyzetgyöke az a nemnegatív szám, amelynek négyzete a. Jel.: $\sqrt{a}$

- n-edik gyök:

1. Legyen n páros pozitív egész szám: $n=2k$, $k \in \mathbf{N}^+$.

   Egy nemnegatív a szám $2k$-adik gyöke az a nemnegatív szám, amelynek $2k$-adik hatványa a.

2. Legyen n páratlan pozitív egész szám: $n=2k+1$, $k \in \mathbf{N}^+$.

   Egy a valós szám $2k+1$-edik gyöke az a szám, amelynek $2k+1$-edik hatványa a.

Jel.: $\sqrt[n]{a}$

Gyökvonás azonosságai

$$\sqrt[n]{a\cdot b}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b} \qquad a,b\geq 0,\ n\in \mathrm{N},\ n\geq 2$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \qquad a\geq 0,\ b>0,\ n\in \mathrm{N},\ n\geq 2$$

$$\sqrt[n]{a^k}=(\sqrt[n]{a})^k \qquad a>0,\ n\in \mathrm{N},\ n\geq 2,\ k\in \mathrm{Z}$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[n\cdot m]{a} \qquad a\geq 0,\ n,m\in \mathrm{N},\ n,m\geq 2$$

$$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[n\cdot k]{a^{m\cdot k}} \qquad a>0,\ n,k\in \mathrm{N},\ n,k\geq 2,\ m\in \mathrm{Z}$$

Hatványozás értelmezése (folyt.)

- Racionális tört kitevőjű hatvány:

  Legyen $n = p/q,\ p \in \mathbf{Z},\ q \in \mathbf{Z},\ q > 1,\ a \in \mathbf{R},\ a > 0$. Ekkor:

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$$

- A hatványozás irracionális kitevőre is kiterjeszthető.

A hatványozás azonosságai

Minden lehetséges értelmezésre:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$\left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m}$$

A logaritmus értelmezése

Legyen $a>0$, $a\neq 1$ és $b>0$. Ekkor a b szám a alapú logaritmusa (jel.: $\log_a b$) jelenti azt a valós számot (kitevőt), amelyre a-t emelve b-t kapunk:

$$a^{\log_a b} = b$$

Pl.: $\log_2 8 = 3$, mert $2^3=8$

$\log_2 1 = 0$, mert $2^0=1$

$\log_2 1/8 = -3$, mert $2^{-3}=1/8$

Speciálisan, a 10-es alapú logaritmus jelölése: $\lg$

A logaritmus azonosságai

Legyen $a,b,c>0,\ a\neq 1$. Ekkor:

$$\log_a(b\cdot c)=\log_a b+\log_a c$$

$$\log_a\left(\frac{b}{c}\right)=\log_a b-\log_a c$$

$$\log_a(b^k)=k\cdot\log_a b\ ,\quad k\in R$$

$$\log_a(a^k)=k\,,\quad k\in R$$

$$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a},\quad c\neq 1$$