Elméleti kérdések (2. rész): Lineáris algebra

Az R^n vektortér

1. Lineáris kombináció, triviális lineáris kombináció fogalma

Legyenek $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_k$ n-dimenziós vektorok és $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ skalárok.

Ekkor a $\lambda_1 \cdot \underline{a}_1 + \lambda_2 \cdot \underline{a}_2 + \ldots + \lambda_k \cdot \underline{a}_k \in R^n$ vektort az $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_k$ vektorok $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ skalárokkal vett **lineáris kombináció**jának nevezzük.

Ha a lineáris kombinációban az összes skalár nulla, akkor **triviális lineáris kombináció**ról beszélünk.

Triviális lineáris kombináció eredménye (bármilyen $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_k$ vektorok esetén) mindig nullvektor.

2. Lineáris függetlenség, lineáris összefüggőség fogalma

Az $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_k \in R^n$ vektorokat **lineárisan függetlenek**nek nevezzük, ha belőlük csak triviális lineáris kombinációval (csupa nulla együtthatóval) állítható elő a nullvektor.

Az $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_k \in R^n$ vektorokat **lineárisan összefüggőek**nek hívjuk, ha belőlük nem triviális lineáris kombinációval is előállítható a nullvektor.

3. Vektorhalmaz rangjának fogalma

Az $\{\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_k\} \subseteq R^n$ **vektorhalmaz rangja** r, ha a vektorok közül kiválasztható r darab lineárisan független vektor, de bármely $r+1$ darab vektor már lineárisan összefüggő.

4. Generátorrendszer, bázis fogalma

Legyen $G \subseteq R^n$ egy vektorhalmaz. G **generátorrendszer** az R^n vektortérben, ha G elemeiből lineáris kombinációval az R^n vektortér bármely vektora előállítható.

Legyen $B \subseteq R^n$ egy vektorhalmaz, amely lineárisan független és generátorrendszer. Ekkor a B-t az R^n vektortér egy **bázis**ának hívjuk.

Mátrixok

1. Mátrix transzponáltjának fogalma

Az A m x n-es mátrix **transzponáltján** azt az n x m–es mátrixot értjük, amelynek (i,j)-edik eleme egyenlő az A mátrix (j,i)-edik elemével. Jel.: A^T (A transzponált mátrixot az eredeti A mátrixból a sorok és oszlopok felcserélésével kapjuk.)

2. Speciális mátrixok (négyzetes, diagonális, egységmátrix, szimmetrikus, nullmátrix) fogalma

Négyzetes mátrix: n x n -es mátrix

Diagonális mátrix: olyan négyzetes mátrix, amelynek a főátlón kívüli elemei mind nullák.

Egységmátrix: olyan diagonális mátrix, amelynek főátlójában egyesek állnak.

Szimmetrikus mátrix: olyan $A=(a_{ij})_{n\text{x}n}$ négyzetes mátrix, melyben $a_{ij}= a_{ji}$ $i,j = 1,\ldots,n$.

Nullmátrix: olyan m x n mátrix, amelynek minden eleme nulla.

3. Mátrixműveletek (összeadás, skalárral való szorzás, mátrixszorzás) definíciója

Mátrixok összeadása:

Legyen $A = (a_{ij})_{m\text{x}n}$ és $B = (b_{ij})_{m\text{x}n}$ két azonos méretű mátrix. Ekkor A és B összege:

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m\text{x}n}$$

Mátrix skalárral való szorzása:

Legyen $A = (a_{ij})_{m\text{x}n}$ és $\lambda \in R$. Ekkor az A mátrix λ-szorosa: $\lambda \cdot A = (\lambda \cdot a_{ij})_{m\text{x}n}$

Mátrixok szorzása:

Legyenek $A = (a_{ij})_{m\text{x}n}$ és $B = (b_{jk})_{n\text{x}p}$ mátrixok. Ekkor az A és B mátrixok szorzata az a C mxp-s mátrix, amelynek (i,k)-adik eleme:

$$c_{ik} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nk}$$

Két mátrix összeszorozhatóságának feltétele, hogy az első mátrix oszlopainak száma megegyezzen a második mátrix sorainak számával.

4. Mátrix rangjának fogalma

Egy mátrix **oszloprang**ján az oszlopvektoraiból álló vektorhalmaz rangját értjük, míg egy mátrix **sorrang**ján a sorvektoraiból álló vektorhalmaz rangját értjük

Igazolható, hogy bármely mátrix esetén a sor- és oszloprang megegyezik. Ezt a közös értéket röviden a mátrix **rang**jának nevezzük:

$$r(A) = r_s(A) = r_o(A)$$

5. Négyzetes mátrix invertálhatósága, az inverz mátrix fogalma

Legyen A egy nxn-es négyzetes mátrix. A-t **invertálható**nak nevezzük, ha van olyan X nxn-es mátrix, melyre $A \cdot X = X \cdot A = E_{nxn}$. Ekkor X-t az A mátrix **inverzé**nek hívjuk és A^{-1}-gyel jelöljük.

6. Mi a szükséges és elégséges feltétele annak, hogy egy négyzetes mátrix invertálható legyen?

Az A nxn-es mátrix invertálható $\Leftrightarrow$ $r(A) = n$.

Az A nxn-es mátrix invertálható $\Leftrightarrow$ $det(A) \neq 0$.

7. Részmátrix fogalma

Legyen $A = (a_{ij})$ nxn-es mátrix. Az A mátrix a_{ij} elemhez tartozó **részmátrixá**n azt az (n-1)x(n-1)-es mátrixot értjük, amelyet az A mátrixból annak i-edik sorát és j-edik oszlopát elhagyva kapunk. Jel.: A_{ij}.

8. Négyzetes mátrix determinánsának fogalma

(1) Legyen $A = [a_{11}]$ 1x1-es mátrix. Ekkor A determinánsa: $det(A) = a_{11}$.

(2) Legyen $A = (a_{ij})$ nxn-es mátrix, ahol $n \geq 2$. Ekkor A determinánsa: (első sor szerinti kifejtés)

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det(A_{1j})$$

9. Ismertesse a szinguláris és a nemszinguláris mátrixok jellemzőit!

Szinguláris mátrixokra az alábbi állítások ekvivalensek:

- oszlopvektorok lineárisan összefüggőek
- $r(A_{nxn}) < n$ (a mátrix nem teljes rangú)
- nem invertálható
- $det(A) = 0$

Nemszinguláris mátrixokra az alábbi állítások ekvivalensek:

- oszlopvektorok lineárisan függetlenek
- $r(A_{nxn}) = n$ (a mátrix teljes rangú)
- invertálható
- $det(A) \neq 0$

Lineáris egyenletrendszerek

1. Írja fel a lineáris egyenletrendszerek általános alakját részletes formában, vektoregyenlet formájában, illetve mátrixos írásmóddal!

Részletes alak:

$$\begin{aligned} a_{11}\cdot x_1 + \ldots + a_{1n}\cdot x_n &= b_1 \\ a_{21}\cdot x_1 + \ldots + a_{2n}\cdot x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}\cdot x_1 + \ldots + a_{mn}\cdot x_n &= b_m \end{aligned}$$

Vektoregyenlet forma:

$$\underline{a}_1\cdot x_1 + \underline{a}_2\cdot x_2 + \ \ldots\ + \underline{a}_n\cdot x_n = \underline{b}$$

ahol:

$$\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix},\ \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix},\ \ldots\ ,\underline{a}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix},\quad \underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Mátrixos forma:

ahol: $A\cdot\underline{x} = \underline{b}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n}$$

2. Homogén és inhomogén egyenletrendszer fogalma

Az $A\cdot\underline{x} = \underline{b}$ lineáris egyenletrendszert **homogén**nek nevezzük, ha $\underline{b} = \underline{o}$.

Az $A\cdot\underline{x} = \underline{b}$ lineáris egyenletrendszert **inhomogén**nek nevezzük, ha $\underline{b} \neq \underline{o}$.

3. Mi a lineáris egyenletrendszerek megoldhatóságának szükséges és elégséges feltétele?

Az $A\cdot\underline{x} = \underline{b}$ lin. egyenletrendszer megoldható $\Leftrightarrow$ r (A) = r $([A,\underline{b}])$, ahol $[A,\underline{b}]$ az egyenletrendszer kibővített mátrixa:

$$[A,\underline{b}] = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}_{m\times(n+1)}.$$

4. Mit tudunk egy homogén lineáris egyenletrendszer megoldásvektorainak számáról?

- Az $A \cdot \underline{x} = \underline{o}$ homogén lineáris egyenletrendszer mindig megoldható, az $\underline{x} = \underline{o}$ megoldásvektort triviális megoldásnak nevezzük.
- Az $A \cdot \underline{x} = \underline{o}$ homogén lin. egyenletrendszernek csak triviális megoldásvektora van $\Leftrightarrow$ $r(A) = n$, ahol n az ismeretlenek száma.
- Az $A \cdot \underline{x} = \underline{o}$ homogén lin. egyenletrendszernek végtelen sok megoldásvektora van $\Leftrightarrow$ $r(A) < n$, ahol n az ismeretlenek száma.

5. Mit tudunk egy inhomogén lineáris egyenletrendszer megoldásvektorainak számáról?

- Az $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$ inhomogén lin. egyenletrendszer nem oldható meg $\Leftrightarrow$ $r(A) < r([A,\underline{b}])$.
- Az $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$ inhomogén lin. egyenletrendszernek egy darab megoldásvektora van $\Leftrightarrow$ $r(A) = r([A,\underline{b}]) = n$, ahol n az ismeretlenek száma.
- Az $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$ inhomogén lin. egyenletrendszernek végtelen sok megoldásvektora van $\Leftrightarrow$ $r(A) = r([A,\underline{b}]) < n$, ahol n az ismeretlenek száma.