# Mátrixok

*Összeállította: dr. Leitold Adrien*
*egyetemi docens*

# Mátrix

- Mátrix: téglalap alakú számtáblázat

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Jelölés: $A$, $A_{m\text{x}n}$, $(a_{\text{ij}})_{m\text{x}n}$

- Mátrix típusa (rendje): $m$ x $n$
  - $m$: sorok száma
  - $n$: oszlopok száma
- Mátrix ($i$ , $j$)-edik eleme: $a_{ij}$
  - $i$: sorindex $i$ = 1, … , $m$
  - $j$: oszlopindex $j$ = 1, … , $n$

# Egyenlő mátrixok, mátrix transzponáltja

- Két mátrix egyenlő, ha típusuk megegyezik és a megfelelő elemeik rendre megegyeznek.

- Mátrix transzponáltja: Az $A$ $m$ x $n$-es mátrix transzponáltján azt az $n$ x $m$–es mátrixot értjük, amelyet az $A$ mátrixból a sorok és oszlopok felcserélésével kapunk.

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \Rightarrow A^T_{n\times m} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

# Speciális mátrixok

- Sorvektor: (1 x $n$ )-es mátrix, Jel.: $\underline{a} = (a_1,\ldots,a_n)$
- Oszlopvektor: ($n$ x 1 )-es mátrix,

  Jel.:

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

- Négyzetes mátrix: ($n$ x $n$ )-es mátrix

$$A_{nxn} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

főátló:

$a_{11}, a_{22}, \ldots , a_{nn}$

# Speciális mátrixok (folyt.)

- **Diagonális mátrix:** olyan négyzetes mátrix, amelynek a főátlón kívüli elemei mind nullák.

$$A_{n\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- **Szimmetrikus mátrix:** olyan $A=(a_{ij})_{n\times n}$ négyzetes mátrix, melyben $a_{ij}= a_{ji}\quad i,j = 1,\dots,n.$

  Megjegyzés:

$$A \text{ szimmetrikus} \quad \Leftrightarrow \quad A = A^{\mathrm{T}}$$

# Speciális mátrixok (folyt.)

- Egységmátrix: olyan diagonális mátrix, amelynek főátlójában egyesek állnak.

$$E_{n\times n}=\begin{pmatrix}1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & 1\end{pmatrix}$$

- Nullmátrix: olyan mátrix, amelynek minden eleme nulla.

$$0_{m\times n}=\begin{pmatrix}0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & 0\end{pmatrix}$$

# Mátrixműveletek

- Mátrixok összeadása:

  Legyen $A = (a_{ij})_{m\text{x}n}$ és $B = (b_{\mathrm{ij}})_{m\text{x}n}$ két azonos méretű mátrix. Ekkor $A$ és $B$ összege:

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m\text{x}n}$$

- Mátrix skalárral való szorzása:

  Legyen $A = (a_{ij})_{m\text{x}n}$ és $\lambda \in R$. Ekkor az $A$ mátrix $\lambda$-szorosa:

$$\lambda \cdot A = (\lambda \cdot a_{ij})_{m\text{x}n}$$

- Két mátrix különbsége: származtatott művelet

$$A - B = A + (-1) \cdot B = (a_{ij} - b_{ij})_{m\text{x}n}$$

## Az összeadás és a skalárral való szorzás tulajdonságai

- A mátrixösszeadás és skalárral való szorzás tulajdonságai:
  - $(A + B) + C = A + (B + C)$
  - $A + B = B + A$
  - $A + 0 = A$
  - $(\lambda+\mu)\cdot A = \lambda\cdot A + \mu\cdot A$
  - $\lambda\cdot (A + B) = \lambda\cdot A + \lambda\cdot B$
- Megjegyzés: a $(-1)\cdot A$ mátrixot az $A$ mátrix ellentettjének nevezzük és $-A$ –val jelöljük.

  Ekkor: $A + (-A) = 0$

# Mátrixműveletek (folyt.)

- Mátrixok szorzása:

Legyenek $A = (a_{ij})_{m\text{x}n}$ és $B = (b_{jk})_{n\text{x}p}$ mátrixok. Ekkor az $A$ és $B$ mátrixok szorzata az a $C$ $m$x$p$-s mátrix, amelynek $(i,k)$-adik eleme:

$$c_{ik} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nk}$$

Figyelem! Két mátrix összeszorozhatóságának feltétele, hogy az első mátrix oszlopainak száma megegyezzen a második mátrix sorainak számával.

- Mátrix hatványa: Ha $A$ négyzetes mátrix, akkor

$A^n = A \cdot A \cdot \ldots \cdot A$ ( $n$-szer szorozzuk $A$-t önmagával, ahol $n$ pozitív egész)

# A mátrixszorzás tulajdonságai

- A mátrixszorzás tulajdonságai:
  - Általában: $A \cdot B \neq B \cdot A$ (nem kommutatív)
  - Asszociatív, azaz ha az $A \cdot (B \cdot C)$ szorzat létezik, akkor az $(A \cdot B) \cdot C$ szorzat is létezik és
    $$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$$
  - $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ (balról disztributív)
  - $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$ (jobbról disztributív)
  - Zérusosztós művelet, azaz két mátrix szorzata úgy is lehet nullmátrix, hogy a két mátrix egyike sem nullmátrix.
  - $A_{m\text{x}n} \cdot 0_{n\text{x}p} = 0_{m\text{x}p}$, illetve $0_{m\text{x}n} \cdot A_{n\text{x}p} = 0_{m\text{x}p}$
  - $A_{m\text{x}n} \cdot E_{n\text{x}n} = A_{m\text{x}n}$, illetve $E_{m\text{x}m} \cdot A_{m\text{x}n} = A_{m\text{x}n}$

# Mátrix oszlopvektorai

- Tekintsünk egy mátrixot!

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- Oszlopvektorok: $A = [\underline{a}_1 \dots \underline{a}_n]$

$$\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \dots , \underline{a}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

$n$ darab $m$ dimenziós oszlopvektor

# Mátrix sorvektorai

- Tekintsünk egy mátrixot!

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- Sorvektorok:

$$A_{m\times n} = \begin{bmatrix} \underline{a}^1 \\ \vdots \\ \underline{a}^m \end{bmatrix}$$

$$\underline{a}^1 = (a_{11}, \dots , a_{1n}) , \quad \dots \quad , \underline{a}^m = (a_{m1}, \dots , a_{mn})$$

$m$ darab $n$ dimenziós sorvektor

# Mátrix rangja

- Mátrix oszloprangja:

Egy mátrix oszloprangján az oszlopvektoraiból álló vektorhalmaz rangját értjük, azaz ha

$A_{mxn} = [\underline{a}_1 \ldots \underline{a}_n]$, akkor $r_o(A) = r(\{\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n\})$.

- Mátrix sorrangja:

Egy mátrix sorrangján a sorvektoraiból álló vektorhalmaz rangját értjük, azaz ha

$A_{mxn} = \begin{bmatrix} \underline{a}^1 \\ \vdots \\ \underline{a}^m \end{bmatrix}$, akkor $r_s(A) = r(\{\underline{a}^1, \ldots, \underline{a}^m\})$.

- Igazolható, hogy bármely mátrix esetén a sor- és oszloprang megegyezik. Ezt a közös értéket röviden a mátrix rangjának nevezzük:

$$r(A) = r_s(A) = r_o(A)$$

# A transzponálásra vonatkozó szabályok

- A transzponálásra vonatkozó szabályok:
  - $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = A$
  - $(A + B)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}}$
  - $(\lambda \cdot A)^{\mathrm{T}} = \lambda \cdot A^{\mathrm{T}}$
  - $(A \cdot B)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}} \cdot A^{\mathrm{T}}$
  - $r(A) = r(A^{\mathrm{T}})$

# Négyzetes mátrix inverze

- Invertálhatóság, inverzmátrix:

  Legyen $A$ egy $n$x$n$-es négyzetes mátrix. $A$-t invertálhatónak nevezzük, ha van olyan $X$ $n$x$n$-es mátrix, melyre $A \cdot X = X \cdot A = E_{n\text{x}n}$.

  Ekkor $X$-t az $A$ mátrix inverzének hívjuk és $A^{-1}$-gyel jelöljük.

- Az invertálhatóság feltétele:

  Az $A$ $n$x$n$-es mátrix invertálható $\Leftrightarrow$ $r(A) = n$.

# Mátrix invertálása bázistranszformációval

- Legyen $A_{n\text{x}n} = [\underline{a}_1 \ \ldots \ \underline{a}_n]$ egy négyzetes mátrix. Ekkor az $A^{-1}$ inverzmátrix az $\underline{e}_1, \ldots , \underline{e}_n$ kanonikus bázisvektoroknak az $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n$ vektorokra, mint bázisra vonatkozó koordinátáiból épül fel.

$$
\begin{array}{c|ccc:ccc}
 & \underline{a}_1 & \ldots & \underline{a}_n & \underline{e}_1 & \ldots & \underline{e}_n \\
\hline
\underline{e}_1 & & & & & & \\
\vdots & & \text{A} & & & \text{E} & \\
\underline{e}_n & & & & & &
\end{array}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{array}{c|ccc}
 & \underline{e}_1 & \ldots & \underline{e}_n \\
\hline
\underline{a}_1 & & & \\
\vdots & & \text{A}^{-1} & \\
\underline{a}_n & & &
\end{array}
$$

# Az invertálás szabályai

- Az invertálás szabályai:

  Legyenek $A$ és $B$ invertálható $n$x$n$-es mátrixok. Ekkor:

  - $A^{-1}$ invertálható és $(A^{-1})^{-1} = A$.
  - $A \cdot B$ invertálható és $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.
  - $A^{T}$ invertálható és $(A^{T})^{-1} = (A^{-1})^{T}$.
  - $\lambda \cdot A$ invertálható és $(\lambda \cdot A)^{-1} = 1/\lambda \cdot A^{-1}$, ahol $\lambda$ nullától különböző valós szám.

# Négyzetes mátrix determinánsa

- Részmátrix:

  Legyen $A = (a_{ij})$ $n$x$n$-es mátrix. Az $A$ mátrix $a_{ij}$ elemhez tartozó részmátrixán azt az $(n$-1)x($n$-1)-es mátrixot értjük, amelyet az $A$ mátrixból annak $i$-edik sorát és $j$-edik oszlopát elhagyva kapunk. Jel.: $A_{ij}$.

- Négyzetes mátrix determinánsa: (rekurzív definíció)

  1. Legyen $A = [a_{11}]$ 1x1-es mátrix. Ekkor $A$ determinánsa: $det\,(A) = a_{11}$.
  2. Legyen $A = (a_{ij})$ $n$x$n$-es mátrix, ahol $n \geq 2$. Ekkor $A$ determinánsa: (első sor szerinti kifejtés)

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j}\, det(A_{1j})$$

# Négyzetes mátrix determinánsa (folyt.)

- A definícióból adódó észrevételek:
  - 2x2-es mátrix determinánsa:

    $$det\,(A) = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

    („főátlóbeli elemek szorzata mínusz mellékátlóbeli elemek szorzata”)

  - A determináns meghatározásának számolási igénye rohamosan növekszik a mátrix méretével.

  - Diagonális mátrix determinánsa egyenlő a főátlóbeli elemek szorzatával.

# Sorok és oszlopok szerinti kifejtés

- Igazolható, hogy egy négyzetes mátrix determinánsa bármelyik sor ill. oszlop szerint kifejtve megkapható.
  - Az $i$-edik sor szerinti kifejtés képlete:

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \, det(A_{ij})$$

  - A $j$-edik oszlop szerinti kifejtés képlete:

$$det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \, det(A_{ij})$$

- Következmény: $det\,(A) = det\,(A^{\mathrm{T}})$.

# A determináns tulajdonságai

A determináns tulajdonságai egyaránt igazak sorokra és oszlopokra megfogalmazva.

1. Ha a mátrix valamely oszlopában csupa nulla áll, akkor a determináns értéke 0.
2. Ha a mátrix két tetszőleges oszlopát felcseréljük, a determináns -1-szeresére változik.
3. Ha a mátrixban van két azonos oszlop, akkor a determináns értéke 0.
4. Legyen $A_{n \times n} = [\underline{a}_1 \ldots \underline{a}_j \ldots \underline{a}_n]$, ahol $\underline{a}_j = \underline{a}_j' + \underline{a}_j''$. Ekkor:

$$det(A) = det([\underline{a}_1 \ldots \underline{a}_j' \ldots \underline{a}_n]) + det([\underline{a}_1 \ldots \underline{a}_j'' \ldots \underline{a}_n]).$$

# A determináns tulajdonságai (folyt.)

5. Legyen $A_{n\text{x}n} = [\underline{a}_1 \ldots \underline{a}_j \ldots \underline{a}_n]$, ahol $\underline{a}_j = \lambda \cdot \underline{a}_j'$. Ekkor:

$$det(A) = \lambda \cdot det([\underline{a}_1 \ldots \underline{a}_j' \ldots \underline{a}_n]).$$

6. Legyen $A$ $n$x$n$-es mátrix és $\lambda \in R$. Ekkor:

$$\det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \cdot det(A)$$

7. Ha a mátrix valamely oszlopához hozzáadjuk egy másik oszlop skalárszorosát (azaz ún. elemi oszlopátalakítást hajtunk végre), akkor a determináns értéke nem változik.
8. Szorzás-tétel: Legyenek $A$ és $B$ $n$x$n$-es mátrixok. Ekkor: $det(A \cdot B) = det(A) \cdot det(B)$.
9. Legyen $A$ invertálható mátrix. Ekkor:

$$det(A^{-1}) = 1 \,/\, det(A).$$

# Négyzetes mátrixok osztályozása

## Nemszinguláris mátrixok

- oszlopvektorok lineárisan függetlenek
- $r(A_{n\text{x}n}) = n$ (a mátrix teljes rangú)
- invertálható
- $det(A) \neq 0$

## Szinguláris mátrixok

- oszlopvektorok lineárisan összefüggőek
- $\mathrm{r}(A_{n\text{x}n}) < n$ (a mátrix nem teljes rangú)
- nem invertálható
- $det(A) = 0$

# Négyzetes mátrix adjungáltja és az inverzmátrix

- ## Négyzetes mátrix adjungáltja:

Legyen $A = (a_{ij})_{n\text{x}n}$ egy négyzetes mátrix. Ekkor az $A$ mátrix adjungáltja az az $n\text{x}n$-es mátrix, amelynek $(i,j)$-edik eleme: $(-1)^{i+j}\cdot det(A_{ji})$. Jel.: $adj(A)$

Megjegyzés: A fenti definíció alapján levezethető, hogy egy 2x2-es mátrix adjungáltját megkaphatjuk úgy, hogy a főátlóban lévő elemeket megcseréljük, a mellékátlóban lévő elemeket pedig szorozzuk -1-gyel.

- ## Az adjungált és az inverzmátix kapcsolata:

Legyen az $A$ négyzetes mátrix invertálható. Ekkor:

$$A^{-1} = (1\ /\ det(A)) \cdot adj(A).$$