Lineáris egyenletrendszerek

Összeállította: dr. Leitold Adrien

egyetemi docens

Lineáris egyenletrendszerek általános alakja

- Általános (részletes) alak:

$$a_{11}\cdot x_1+\ldots+a_{1n}\cdot x_n=b_1$$
$$a_{21}\cdot x_1+\ldots+a_{2n}\cdot x_n=b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}\cdot x_1+\ldots+a_{mn}\cdot x_n=b_m$$

m egyenlet
n ismeretlen: $x_1, \ldots, x_n$

- Jelölések:

$$\underline{a}_1=\begin{pmatrix}a_{11}\\ \vdots\\ a_{m1}\end{pmatrix},\ \underline{a}_2=\begin{pmatrix}a_{12}\\ \vdots\\ a_{m2}\end{pmatrix},\ \ldots,\ \underline{a}_n=\begin{pmatrix}a_{1n}\\ \vdots\\ a_{mn}\end{pmatrix},\qquad \underline{b}=\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_m\end{pmatrix}$$

Lin. egyenletrendszerek általános alakja (folyt.)

- Tömörebb alak:

$$\underline{a}_1 \cdot x_1 + \underline{a}_2 \cdot x_2 + \ldots + \underline{a}_n \cdot x_n = \underline{b}$$

- Jelölések:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n}$$ együtthatómátrix, $$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

- Tömör alak:

$$A \cdot \underline{x} = \underline{b}$$

Homogén és inhomogén egyenletrendszerek

- Homogén egyenletrendszer:

Az $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$ lineáris egyenletrendszert homogénnek nevezzük, ha $\underline{b} = \underline{o}$.

- Inhomogén egyenletrendszer:

Az $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$ lineáris egyenletrendszert inhomogénnek nevezzük, ha $\underline{b} \neq \underline{o}$.

- Megjegyzés:

Az $A \cdot \underline{x} = \underline{o}$ homogén lineáris egyenletrendszer mindig megoldható, az $\underline{x} = \underline{o}$ megoldásvektort triviális megoldásnak nevezzük.

A megoldhatóság feltétele

- Lineáris egyenletrendszerek megoldhatóságának szükséges és elégséges feltétele:

Az $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$ lin. egyenletrendszer megoldható $\Leftrightarrow$

$$\mathrm{r}\,(A) = \mathrm{r}\,([A,\underline{b}]),$$

ahol $[A,\underline{b}]$ az egyenletrendszer kibővített mátrixa:

$$[A,\underline{b}] = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}_{m\times(n+1)} .$$

Lin. egyenletrendszer „megoldó képlete”

$$\boxed{\underline{x}_B = \underline{d} - \underline{D} \cdot \underline{x}_R}$$

„megoldó képlet”

- $\underline{x}_B$: a kötött ismeretlenek vektora
- $\underline{x}_R$: a szabad ismeretlenek vektora

Megoldásvektorok száma

- Homogén lin. egyenletrendszer megoldásvektorainak számára vonatkozó állítások:

1. Az $A \cdot \underline{x} = \underline{o}$ homogén lin. egyenletrendszernek csak triviális megoldása van $\Leftrightarrow$ $\mathrm{r}(A) = n$, ahol n az ismeretlenek száma.
2. Az $A \cdot \underline{x} = \underline{o}$ homogén lin. egyenletrendszernek van triviálistól különböző megoldása is $\Leftrightarrow$ $\mathrm{r}(A) < n$, ahol n az ismeretlenek száma.

   Megjegyzés: ebben az esetben az egyenletrendszernek végtelen sok megoldásvektora van.

Homogén-inhomogén egyenletrendszer-pár

- Homogén-inhomogén egyenletrendszer megoldás-halmazai közötti kapcsolat:

  Tekintsük az $A \cdot \underline{x} = \underline{o}$ és $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$ homogén-inhomogén egyenletrendszer-párt. Jelölje

  - M_0 a homogén egyenletrendszer megoldáshal-mazát,
  - M az inhomogén egyenletrendszer megoldáshal-mazát,
  - $\underline{x}_0$ az inhomogén egyenletrendszer egy rögzített megoldásvektorát.

  Ekkor: $M = M_0 + \{\underline{x}_0\}$.

Lineáris egyenletrendszerek: összefoglalás

Megoldásvektorok száma	Homogén lin. e.r. $A_{m\times n}\cdot\underline{x}=\underline{o}$	Inhomogén lin. e.r. $A_{m\times n}\cdot\underline{x}=\underline{b}$
Nincs megoldás (Az e. r. nem oldható meg.)	-------	$\mathrm{r}(A)<\mathrm{r}([A,\underline{b}])$ $M=\emptyset$
1 db. megoldásvektor (Az e.r. egyértelműen megoldható.)	$\mathrm{r}(A)=n$ $M_0=\{\underline{o}\}$	$\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}([A,\underline{b}])=n$ $M=\{\underline{x}_0\}$
Végtelen sok megoldásvektor	$\mathrm{r}(A)<n$ M_0	$\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}([A,\underline{b}])<n$ $M=M_0+\{\underline{x}_0\}$