Az R^3 tér geometriája

Összeállította: dr. Leitold Adrien
egyetemi docens

2018. 02. 24.

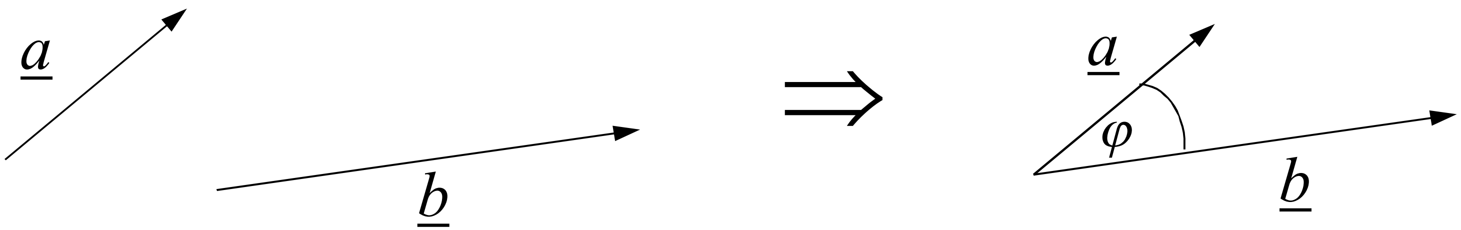
Vektorok

- Vektor: irányított szakasz
  Jel.: $\underline{a}$, $\mathbf{a}$, $\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}$,
  Jellemzői:
  - irány,
  - hosszúság, (abszolút érték) jel.: $|\underline{a}|$

- Speciális vektorok:
  - nullvektor: hossza 0, iránya tetszőleges. Jel.: $\underline{0}$, $\underline{o}$
  - egységvektor: hossza egységnyi.

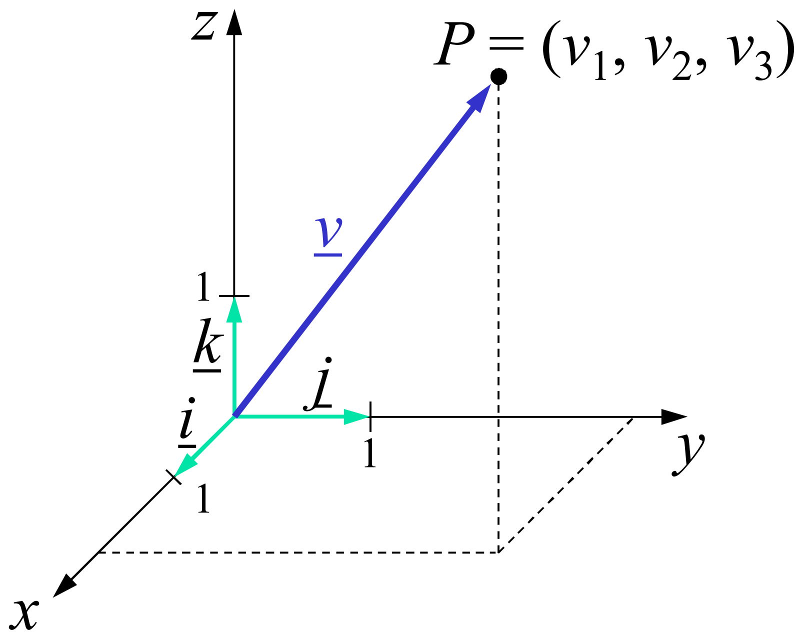
- Megjegyzés: az azonos hosszúságú és irányú, de különböző kezdőpontú vektorokat azonosaknak tekintjük.

Két vektor szöge



- A vektorokat közös kezdőpontba tolva az általuk meghatározott félegyenesek szöge Jel.: $\angle\,(\underline{a},\underline{b}) = \varphi$
- Speciálisan:
  - Ha $\varphi = 0°, \Rightarrow \underline{a}$ és $\underline{b}$ azonos irányú, (párhuzamos)
  - Ha $\varphi = 180°, \Rightarrow \underline{a}$ és $\underline{b}$ ellentétes irányú, (párhuzamos)
  - Ha $\varphi = 90°, \Rightarrow \underline{a}$ és $\underline{b}$ merőleges.

Vektorok koordináta-rendszerben



A vektorokat helyvektorok-ként helyezzük el a térbeli, derékszögű (Descartes-féle) koordináta-rendszerben.

Ekkor minden térbeli vektor egyértelműen felbontható a koordináta-tengelyek irányába eső összetevőkre:

$$\underline{v} = v_1 \cdot \underline{i} + v_2 \cdot \underline{j} + v_3 \cdot \underline{k}$$

Vektorok koordináta-rendszerben (folyt.)

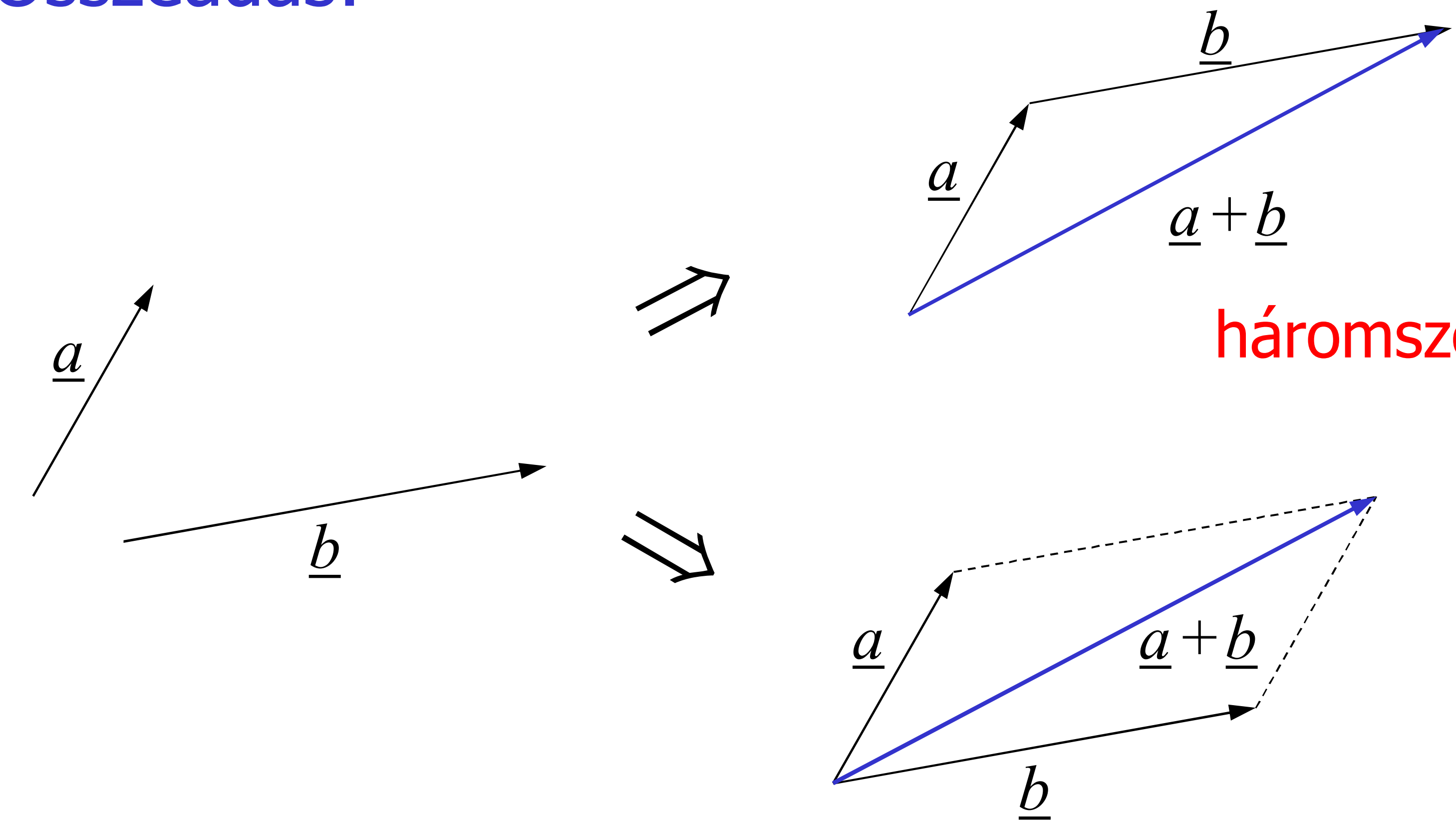
- A $\underline{v}$ vektor koordináta-tengelyek irányába eső összetevői: $v_1 \cdot \underline{i}\,,\quad v_2 \cdot \underline{j}\,,\quad v_3 \cdot \underline{k}$
- A $\underline{v}$ vektor koordinátái: $v_1,\ v_2,\ v_3$
- Megjegyzés: A $\underline{v}$ helyvektor koordinátái azonosak végpontjának koordinátáival.

  Jel.: $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$
- A $\underline{v}$ vektor hossza (a térbeli Pitagorasz-tétel alapján):

$$|\,\underline{v}\,| = \sqrt{v_1^{\,2} + v_2^{\,2} + v_3^{\,2}}$$

Műveletek vektorokkal: összeadás

Összeadás:



háromszög-módszer

paralelogramma-módszer

ha $\underline{a}$ és $\underline{b}$ nem párhuzamos

Összeadás (folyt.)

- Az összeadás tulajdonságai:

  Legyenek $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$ tetszőleges térbeli vektorok. Ekkor:

  $(\underline{a}+\underline{b})+\underline{c}=\underline{a}+(\underline{b}+\underline{c})$ (asszociativitás)

  $\underline{a}+\underline{b}=\underline{b}+\underline{a}$ (kommutativitás)

  $\underline{a}+\underline{o}=\underline{a}$

  $|\underline{a}+\underline{b}|\leq|\underline{a}|+|\underline{b}|$ (háromszög-egyenlőtlenség)

- Összeadás koordinátákkal:

  Legyenek $\underline{a}=(a_1, a_2, a_3)$ és $\underline{b}=(b_1, b_2, b_3)$ térbeli vektorok. Ekkor:

$$\underline{a}+\underline{b}=(a_1+b_1,\ a_2+b_2,\ a_3+b_3)$$

Műveletek vektorokkal: skalárral való szorzás

- Skalárral való szorzás:

  Legyen $\underline{a}$ egy tetszőleges térbeli vektor, $\lambda \in R$ egy skalár. Ekkor:

  $\lambda \cdot \underline{a}$ az a vektor, amelynek
  - hossza: $|\lambda| \cdot |\underline{a}|$,
  - iránya:
    - azonos az $\underline{a}$ vektor irányával, ha $\lambda > 0$,
    - ellentétes az $\underline{a}$ vektor irányával, ha $\lambda < 0$,
    - tetszőleges, ha $\lambda = 0$.

Skalárral való szorzás (folyt.)

- A skalárral való szorzás tulajdonságai:

  Legyenek $\underline{a}$ és $\underline{b}$ tetszőleges térbeli vektorok, $\lambda, \mu \in R$ skalárok. Ekkor:

  $$0 \cdot \underline{a} = \underline{o}$$
  $$\lambda \cdot \underline{o} = \underline{o}$$
  $$1 \cdot \underline{a} = \underline{a}$$
  $$(\lambda+\mu) \cdot \underline{a} = \lambda \cdot \underline{a} + \mu \cdot \underline{a}$$
  $$\lambda \cdot (\underline{a} + \underline{b}) = \lambda \cdot \underline{a} + \lambda \cdot \underline{b}$$
  $$\lambda \cdot (\mu \cdot \underline{a}) = (\lambda \cdot \mu) \cdot \underline{a}$$

- Skalárral való szorzás koordinátákkal:

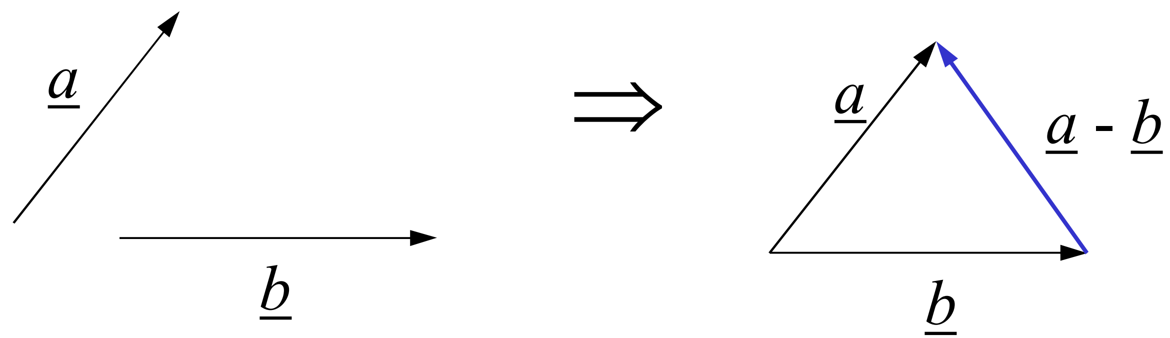
  Legyen $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$ egy tetszőleges térbeli vektor, $\lambda \in R$ egy skalár. Ekkor:

  $$\lambda \cdot \underline{a} = (\lambda \cdot a_1, \lambda \cdot a_2, \lambda \cdot a_3)$$

Műveletek vektorokkal: különbség

- Különbség (származtatott művelet):

$$\underline{a} - \underline{b} = \underline{a} + (-1) \cdot \underline{b}$$



- A különbség számolása koordinátákkal:

Legyenek $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$ és $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3)$ térbeli vektorok. Ekkor:

$$\underline{a} - \underline{b} = (a_1 - b_1,\ a_2 - b_2,\ a_3 - b_3)$$

Műveletek vektorokkal: skaláris szorzás

- Skaláris szorzás:

  Legyenek $\underline{a}$ és $\underline{b}$ tetszőleges térbeli vektorok. Ekkor:

  $\underline{a} \cdot \underline{b} = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot cos\varphi$, ahol φ a két vektor szöge.

Megjegyzés: a művelet eredménye skalár!

Skaláris szorzás (folyt.)

- A skaláris szorzás tulajdonságai:

Legyenek $\underline{a}$ és $\underline{b}$ tetszőleges térbeli vektorok,

$\lambda \in R$ skalár. Ekkor:

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = \underline{b} \cdot \underline{a}$$

$$\underline{a} \cdot \underline{a} = |\,\underline{a}\,|^2 \quad \Rightarrow \quad |\underline{a}| = \sqrt{\underline{a} \cdot \underline{a}}$$

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{a} = \underline{o} \text{ vagy } \underline{b} = \underline{o} \text{ vagy } \varphi = 90^\circ$$

$$(\text{ azaz } \underline{a} \perp \underline{b}\ )$$

$$\lambda \cdot (\underline{a} \cdot \underline{b}) = (\lambda \cdot \underline{a}) \cdot \underline{b} = \underline{a} \cdot (\lambda \cdot \underline{b})$$

$$\underline{a} \cdot (\underline{b} + \underline{c}) = \underline{a} \cdot \underline{b} + \underline{a} \cdot \underline{c}$$

Skaláris szorzás (folyt.)

- Skaláris szorzás koordinátákkal:

  Legyenek $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$ és $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3)$ térbeli vektorok. Ekkor:

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

Műveletek vektorokkal: vektoriális szorzás

Vektoriális szorzás:

(Ez a művelet síkbeli vektorokra nem értelmezhető!)

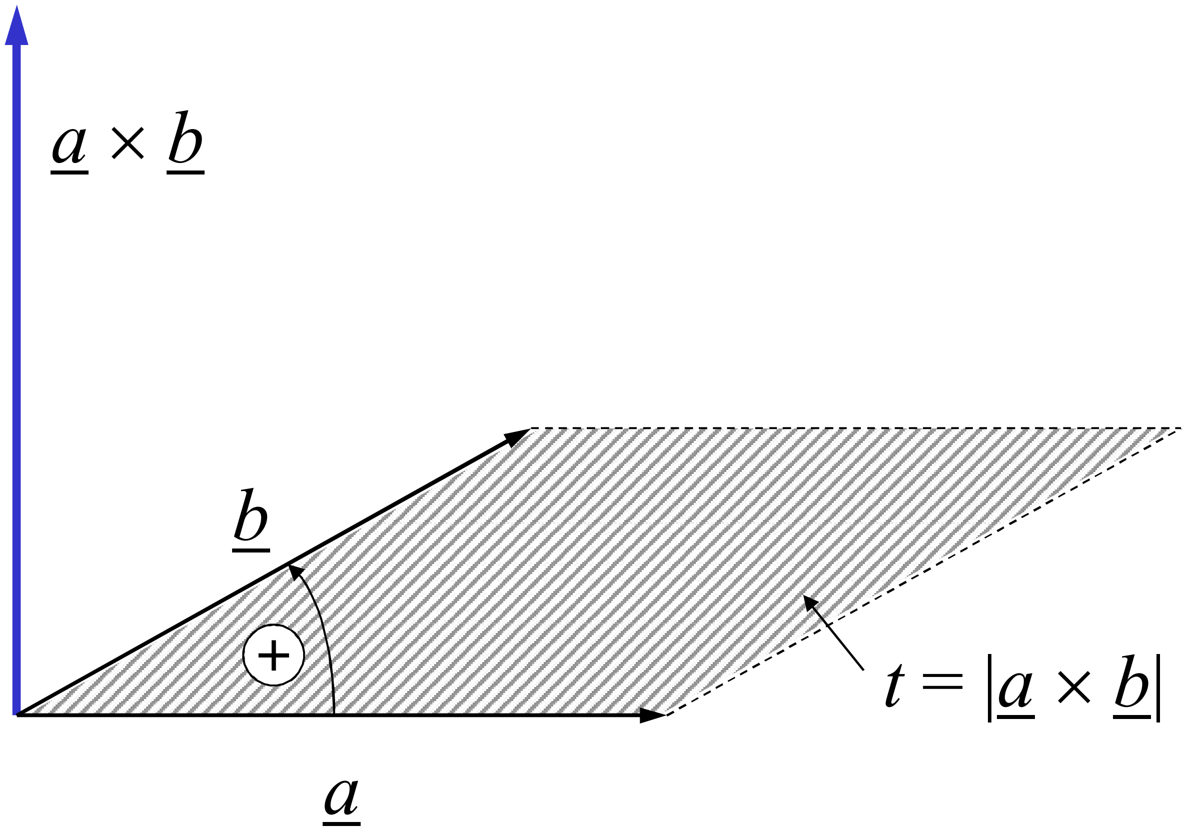
Legyenek $\underline{a}$ és $\underline{b}$ tetszőleges térbeli vektorok. Ekkor $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektoriális szorzata (jel.: $\underline{a} \times \underline{b}$) az a vektor,

- amelynek hossza: $|\underline{a} \times \underline{b}| = |\,\underline{a}\,| \cdot |\,\underline{b}\,| \cdot \sin\varphi$, ahol φ a két vektor szöge,
- amely merőleges az $\underline{a}$ vektorra és a $\underline{b}$ vektorra is,
- amelyre az $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{a} \times \underline{b}$ vektorok jobbrendszert alkotnak.

(azaz $\underline{a} \times \underline{b}$ oda mutat, ahonnan nézve az $\underline{a}$-t $\underline{b}$-be vivő, 180°-nál kisebb szögű forgatás pozitívnak látszik)

Vektoriális szorzás (folyt.)

Az $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{a} \times \underline{b}$ vektorok térbeli elhelyezkedése:



Vektoriális szorzás (folyt.)

A vektoriális szorzás tulajdonságai:

$$\underline{a} \times \underline{b} \neq \underline{b} \times \underline{a}$$

$$\underline{a} \times \underline{b} = -(\underline{b} \times \underline{a})$$

$$(\underline{a} \times \underline{b}) \times \underline{c} \neq \underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c})$$

$$\lambda \cdot (\underline{a} \times \underline{b}) = (\lambda \cdot \underline{a}) \times \underline{b} = \underline{a} \times (\lambda \cdot \underline{b})$$

$$\underline{a} \times (\underline{b} + \underline{c}) = \underline{a} \times \underline{b} + \underline{a} \times \underline{c}$$

$$(\underline{b} + \underline{c}) \times \underline{a} = \underline{b} \times \underline{a} + \underline{c} \times \underline{a}$$

$\underline{a} \times \underline{b} = \underline{o} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{a} = \underline{o}$ vagy $\underline{b} = \underline{o}$ vagy $\varphi = 0°$ vagy $\varphi = 180°$

(azaz $\underline{a} \parallel \underline{b}$)

Vektoriális szorzás (folyt.)

Vektoriális szorzás koordinátákkal:

Legyenek $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$ és $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3)$ térbeli vektorok. Ekkor:

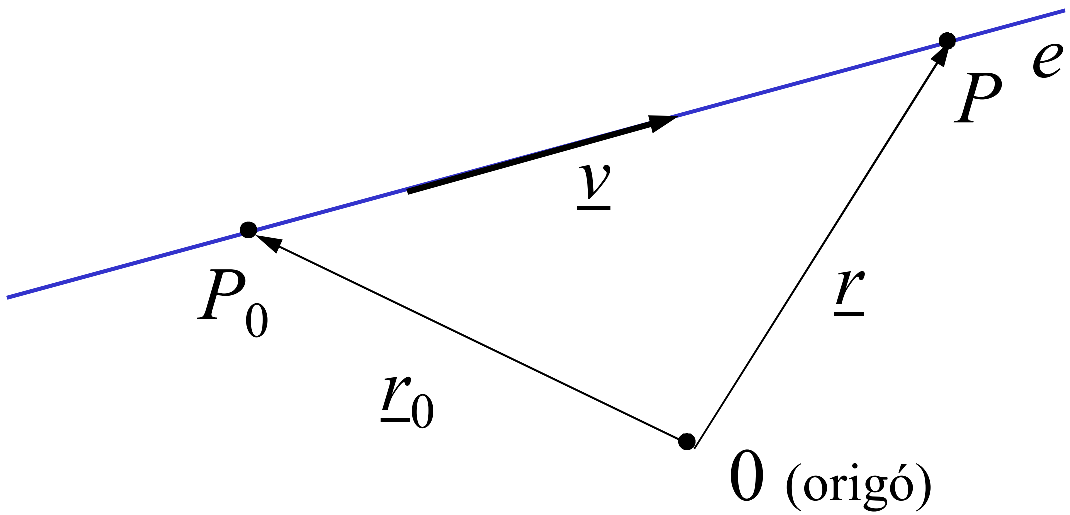
$$\underline{a} \times \underline{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2 ,\ -a_1 b_3 + a_3 b_1,\ a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

Az egyenes

Adott: $P_0=(x_0, y_0, z_0)$, az e egyenes egy pontja,

$\underline{v}=(v_1, v_2, v_3)$, az e egyenes egy irányvektora.

Legyen $P=(x, y, z)$ az e egyenes egy tetszőlegesen választott pontja. Jelölje $\underline{r}_0$ a P_0 pontba, $\underline{r}$ a P pontba mutató helyvektort.



Ekkor $\underline{r} = \underline{r}_0 + t\cdot \underline{v}$ teljesül valamely $t \in R$ valós paraméterre.

Megjegyzés: Térbeli egyeneseknél a normálvektor fogalmát nem használjuk.

Az egyenes (folyt.)

Az egyenes paraméteres vektoregyenlete:

$$\underline{r} = \underline{r}_0 + t \cdot \underline{v} \quad , \quad t \in R$$

Az egyenes paraméteres egyenletrendszere:

$$x = x_0 + t \cdot v_1$$
$$y = y_0 + t \cdot v_2$$
$$z = z_0 + t \cdot v_3 \quad , \quad t \in R$$

Megjegyzés: A tér egy tetszőleges $A=(x_a, y_a, z_a)$ pontja pontosan akkor van rajta egy e egyenesen, ha az A pont koordinátái kielégítik az e egyenes paraméteres egyenletrendszerét valamely $t \in \boldsymbol{R}$ valós paraméterrel.

Az egyenes (folyt.)

Az egyenes paramétermentes egyenletrendszere

- Ha az irányvektor egyik koordinátája sem nulla:

$$\frac{x-x_0}{v_1}=\frac{y-y_0}{v_2}=\frac{z-z_0}{v_3}$$

- Ha az irányvektor egyik koordinátája (pl. v_3) nulla:

$$\frac{x-x_0}{v_1}=\frac{y-y_0}{v_2}, \quad z=z_0$$

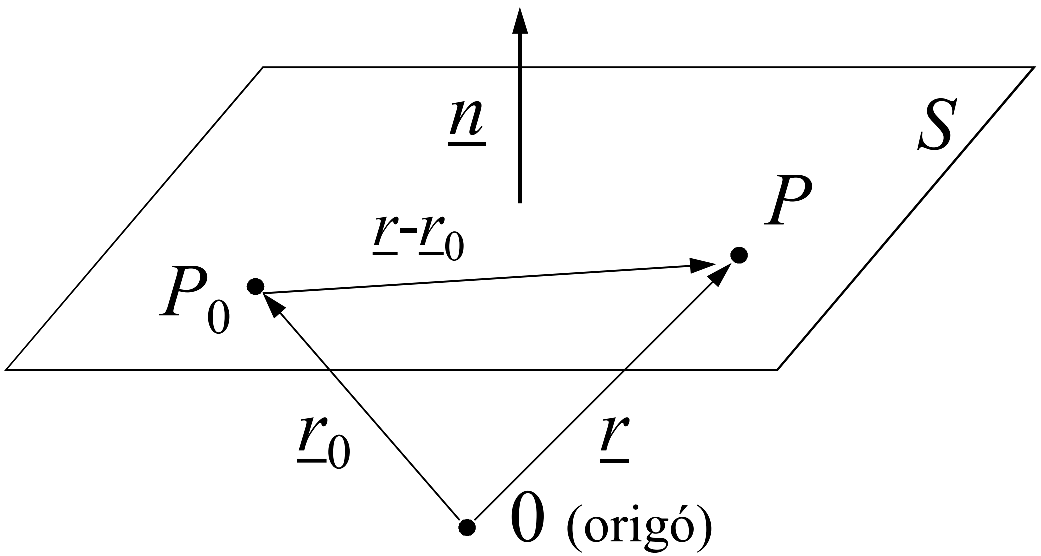
- Ha az irányvektor két koordinátája is nulla, akkor nem írható fel paramétermentes egyenletrend-szer.

A sík

Adott: $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, az S sík egy pontja,

$\underline{n} = (n_1, n_2, n_3)$, az S sík egy normálvektora (a síkra merőleges, nullvektortól különböző vektor).

Legyen $P=(x, y, z)$ az S sík egy tetszőlegesen választott pontja. Jelölje $\underline{r}_0$ a P_0 pontba, $\underline{r}$ a P pontba mutató helyvektort.



Ekkor $\underline{r}-\underline{r}_0 \perp \underline{n}$, így $\underline{n}\cdot(\underline{r}-\underline{r}_0) = 0$ azaz:

$$n_1\cdot(x-x_0) + n_2\cdot(y-y_0) + n_3\cdot(z-z_0) = 0$$

A sík egyenlete:

$$n_1 \cdot (x\text{-}x_0) + n_2 \cdot (y\text{-}y_0) + n_3 \cdot (z\text{-}z_0) = 0$$

azaz:

$$n_1 \cdot x + n_2 \cdot y + n_3 \cdot z = n_1 \cdot x_0 + n_2 \cdot y_0 + n_3 \cdot z_0 = \text{konst.}$$

vagy:

$$A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z = D,$$

ahol $\underline{n} = (A, B, C)$ a sík egy normálvektora, $D \in R$ konstans.