Absztrakt vektorterek
megoldások

1. Az alábbi $H \subset P_R^2$ vektorhalmaz lineárisan független, vagy lineárisan összefüggő?
   $p_1 : R \to R, \quad x \mapsto 3x^2 - 2x + 5$
   $p_2 : R \to R, \quad x \mapsto -x^2 + x - 2$
   $p_3 : R \to R, \quad x \mapsto 3x^2 - x + 4$
   $H := \{p_1, p_2, p_3\}$

Megoldás: Bázistranszformációval ellenőrizhető, hogy a fenti polinomok közül csak kettő vonható be a bázisba, a harmadik polinom előállítható a másik kettő lineáris kombinációjaként. Pl. $p_3=2p_1+3p_2$, így a fenti polinomok lineárisan összefüggőek.

2. Az alábbi $H \subset P_R^5$ vektorhalmaz lineárisan független, vagy lineárisan összefüggő?
   $p_1 : R \to R, \quad x \mapsto x^5 - 2x$
   $p_2 : R \to R, \quad x \mapsto x^4 + 3$
   $p_3 : R \to R, \quad x \mapsto x^3 + 2x^2$
   $H := \{p_1, p_2, p_3\}$

Megoldás: Bázistranszformációval ellenőrizhető, hogy a fenti polinomok mindegyike bevonható a bázisba, így azok lineárisan függetlenek.

3. Igazolja, hogy a
   $p_1 : R \to R, \quad x \mapsto x^3 - 2x,$ a $p_2 : R \to R, \quad x \mapsto x + 5,$ és a $p_3 : R \to R, \quad x \mapsto 2$ polinomok lineárisan függetlenek a P_R^3 vektortérben! Bázist alkotnak-e a fenti polinomok P_R^3-ban?

Megoldás: Bázistranszformációval ellenőrizhető, hogy a fenti polinomok mindegyike bevonható a bázisba, így azok lineárisan függetlenek. Mivel a legfeljebb harmadfokú polinomok vektortere négy dimenziós, így három lineárisan független polinom nem alkot abban bázist.

4. Tekintsük az R^N vektortér következő elemeit!
   $a_1 := 1, 0, 0, \ldots$
   $a_2 := 1, 1, 0, 0, \ldots$
   $a_3 := 1, 1, 1, 0, 0, \ldots$
   $a_4 := 1, 1, 1, 1, 0, 0, \ldots$
   Igazolja, hogy a $H := \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ vektorhalmaz lineárisan független!

Megoldás: Bázistranszformáció itt nem alkalmazható, mivel a valós számsorozatok vektortere végtelen dimenziós. A lineáris függetlenség definíciója alapján ellenőrizhető, hogy a fenti sorozatokból csak a triviális lineáris kombinációval lehet az azonosan nulla sorozatot (nullelem) előállítani.

5. Legyenek $p_1 : R \to R, \ x \mapsto 1; \quad p_2 : R \to R, \ x \mapsto x + 1; \quad p_3 : R \to R, \ x \mapsto x^2 + x + 1;$ polinomok.
   Bázist alkotnak-e a p_1, p_2 és p_3 polinomok a P_R^2 vektortérben? Ha igen, akkor adjuk meg a $p \ : R \to R, \ x \mapsto 3x^2 + 2x - 4$ polinom ezen bázisra vonatkozó koordinátáit!

Megoldás: Bázistranszformációval ellenőrizhető, hogy a fenti polinomok mindegyike bevonható a bázisba, így azok bázist alkotnak a P_R^2 vektortérben. A p polinom koordinátái: -6, -1, 3.

6. Legyenek $p_1 : R \to R,\ x \mapsto x^2 + x + 1;\ p_2 : R \to R,\ x \mapsto x + 1;\ p_3 : R \to R,\ x \mapsto x;$ polinomok.
   Bázist alkotnak-e a p_1, p_2 és p_3 polinomok a P_R^2 vektortérben? Ha igen, akkor adjuk meg a $p\ : R \to R,\ x \mapsto 2x^2 + 1$ polinom ezen bázisra vonatkozó koordinátáit!

Megoldás: Bázistranszformációval ellenőrizhető, hogy a fenti polinomok mindegyike bevonható a bázisba, így azok bázist alkotnak a P_R^2 vektortérben. A p polinom koordinátái: 2, -1, -1.

7. Legyenek $p_1 : R \to R,\ x \mapsto x^2 + 1;\ p_2 : R \to R,\ x \mapsto x + 1;\ p_3 : R \to R,\ x \mapsto x^2 + x;$ polinomok.
   Bázist alkotnak-e a p_1, p_2 és p_3 polinomok a P_R^2 vektortérben? Ha igen, akkor adjuk meg a $p\ : R \to R,\ x \mapsto 6x^2 + 7x + 5$ polinom ezen bázisra vonatkozó koordinátáit!

Megoldás: Bázistranszformációval ellenőrizhető, hogy a fenti polinomok mindegyike bevonható a bázisba, így azok bázist alkotnak a P_R^2 vektortérben. A p polinom koordinátái: 2, 3, 4.

8. Bázist alkotnak-e az $R^{2\times 2}$ vektortérben az *A, B, C* és *D* mátrixok? Ha igen, akkor határozza meg az *X* mátrix ezen bázisra vonatkozó koordinátáit!
   $$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\quad D = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix},\quad X = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Megoldás: Bázistranszformációval ellenőrizhető, hogy az *A, B, C* és *D* mátrixok közül csak három vonható be a bázisba, $D=2C+B$, így azok lineárisan összefüggőek, nem alkotnak bázist.

9. Bázist alkotnak-e az $R^{2\times 2}$ vektortérben az *A, B, C* és *D* mátrixok? Ha igen, akkor határozza meg az *X* mátrix ezen bázisra vonatkozó koordinátáit!
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Megoldás: Bázistranszformációval ellenőrizhető, hogy az *A, B, C* és *D* mátrixok mindegyike bevonható a bázisba, így azok bázist alkotnak. Az *X* mátrix koordinátái: 2, 0, -1, -1.

10. Tekintsük a P_R vektorteret!
    $V_1 := \{p \in P_R\ , p \text{ másodfokú}\}$,
    $V_2 := \{p \in P_R\ , p \text{ legfeljebb negyedfokú}\}$,
    $V_3 := \{p \in P_R\ , \forall x \in R : p(x) \geq 0\}$,
    $V_4 := \{p \in P_R\ , p \text{ páros fokszámú}\}$,
    $V_5 := \{p \in P_R\ , \forall x \in R : p(x) = p(-x)\}$.
    Döntse el, hogy $V_1, \ldots, V_5$ a leszűkített műveletekkel altér-e a P_R vektortérben!

Megoldás: Altér: V_2, V_5

11. Tekintsük az R^N vektorteret!
    $V_1 := \{(a_n) \in R^N, \text{az } (a_n) \text{ sorozat első eleme } 0\}$,
    $V_2 := \{(a_n) \in R^N, \text{az } (a_n) \text{ sorozat konvergens}\}$,
    $V_3 := \{(a_n) \in R^N, \lim(a_n) = a\}$, ahol $a \in R$ rögzített,

$V_4 := \{(a_n) \in R^N, \text{az } (a_n) \text{ sorozatnak csak véges sok 0 - tól különböző eleme van}\}$,

$V_5 := \{(a_n) \in R^N, \text{az } (a_n) \text{ sorozat elemei pozitívak}\}$,

$V_6 := \{(a_n) \in R^N, \lim(a_n) = \infty\}$.

Döntse el, hogy $V_1, \dots, V_6$ a leszűkített műveletekkel altér-e az R^N vektortérben!

Megoldás: Altér: V_1, V_2, V_3 akkor, ha a=0, V_4

12. Legyen I$\subset R$ az origóra szimmetrikus intervallum. Tekintsük az R^{I} vektorteret!

$V_1 := \{f \in R^I, f \text{ folytonos}\}$,

$V_2 := \{f \in R^I, f(0) \geq 0\}$,

$V_3 := \{f \in R^I, \forall x \in \mathrm{I} : f(x) = f(-x)\}$,

$V_4 := \{f \in R^I, f(x) = 0, \text{ véges sok } x \text{ kivételével}\}$,

$V_5 := \{f \in R^I, f \text{ monoton növekvő}\}$,

$V_6 := \{f \in R^I, f \text{ korlátos}\}$.

Döntse el, hogy $V_1, \dots, V_6$ a leszűkített műveletekkel altér-e az R^{I} vektortérben!

Megoldás: Altér: V_1, V_3, V_4 és V_6

13. Tekintsük az $R^{n\times n}$ vektorteret!

$V_1 := \{A \in R^{n\times n}, A \text{ diagonális}\}$,

$V_2 := \{A \in R^{n\times n}, A \text{ alsóháromszög mátrix}\}$,

$V_3 := \{A \in R^{n\times n}, A \text{ utolsó oszlopában 0 - k állnak}\}$,

$V_4 := \{A \in R^{n\times n}, A \text{ invertálható}\}$,

$V_5 := \{A \in R^{n\times n}, \det(A) = 0\}$,

$V_6 := \{A \in R^{n\times n}, A = A^T\}$,

$V_7 := \{A \in R^{n\times n}, A \text{ minden eleme egyenlő}\}$.

Döntse el, hogy $V_1, \dots, V_7$ a leszűkített műveletekkel altér-e az $R^{n\times n}$ vektortérben! Ha alterek, mennyi a dimenziójuk?

Megoldás: V_1 n dimenziós altér, V_2 n^2-$(n^2$-$n)/2$ dimenziós altér, V_3 $n(n$-1) dimenziós altér, V_6 n^2-$(n^2$-$n)/2$ dimenziós altér, V_7 1 dimenziós altér.

14. Adjon meg a P_R^3 vektortérben egy 2-dimenziós és két 1-dimenziós alteret úgy, hogy azok direkt összege legyen P_R^3!

Útmutatás: Célszerű kiindulni a P_R^3 vektortér egy nevezetes bázisából.

15. Adjon meg az $R^{2\times 3}$ vektortérben egy 3-dimenziós, egy 2-dimenziós és egy 1-dimenziós alteret úgy, hogy azok direkt összege legyen $R^{2\times 3}$!

Útmutatás: Célszerű kiindulni az $R^{2\times 3}$ vektortér egy nevezetes bázisából.

16. Az alábbi leképezések közül melyek lineárisak?

a, $A : C \to C,\ z \mapsto \mathrm{Re}(z)$

b, $A : C \to C,\ z \mapsto \overline{z}$

c, $A : C \to C,\ z \mapsto |z|$

Megoldás: Az additivitást és a homogenitást kell ellenőrizni. Lineáris a, és b,.

17. Igazolja, hogy az alábbi leképezések lineárisak! Adja meg magterüket és képterüket!

a, $A: P_R \to P_R,\ p \mapsto p'$ (deriválás)

b, $A: P_R \to P_R,\ p \mapsto p \cdot g$ ($g \in P_R$ rögzített)

c, $A: P_R \to R,\ p \mapsto p(\alpha)$ ($\alpha \in R$ rögzített)

d, $A: P_R \to P_R^n$, minden polinomhoz hozzárendeljük a legfeljebb n-edfokú tagjaiból képzett polinomot ($n \in N$ rögzített)

e, Jelölje V a valós számokból álló konvergens sorozatok halmazát.
$A: V \to R,\ (\mathrm{a_n}) \mapsto \lim(\mathrm{a_n})$

f, $A: D(I) \to R^I \quad f \mapsto f'$ (deriválás)

g, $A: R^I \to R,\ f \mapsto f(x_0)$ ($x_0 \in I$ rögzített)

Megoldás: A linearitáshoz az additivitás és a homogenitás tulajdonságokat kell ellenőrizni.

a, $ker(A)= P_R^0$, $im(A)= P_R$

b, $ker(A)= \{o: R \to R, x \mapsto 0\}$, $im(A)$: olyan polinomok, amelyek oszthatóak g-vel

c, $ker(A)= \{p \in P_R, p(\alpha)=0\}$, $im(A)= R$

d, $ker(A)= \{o: R \to R, x \mapsto 0\}$, $im(A)= P_R^n$

e, $ker(A)$: a 0-hoz konvergáló sorozatok, $im(A)= R$

f, $ker(A)$: az I intervallumon értelmezett konstans függvények, $im(A)$: olyan függvények, melyek egy $D(I)$-beli függvény deriváltjaként előállnak

g, $ker(A)$: olyan R^I-beli függvények, amelyeknek x_0-nál a helyettesítési értéke 0, $im(A)= R$

18. Tekintsük az alábbi polinomokat!

$g\ : R \to R,\ x \mapsto x^2+1,$

$p_n : R \to R,\ x \mapsto x^n,\quad n = 0, 1, 2, 3, 4.$

Legyen $B_1 = \{p_0, p_1, p_2\}$ bázis a P_R^2 vektortérben, $B_2 = \{p_0, p_1, p_2, p_3, p_4\}$ bázis a P_R^4 vektortérben.

Adja meg az $A: P_R^2 \to P_R^4,\ p \mapsto p \cdot g$ lineáris leképezés $B_1 - B_2$ bázisokra vonatkozó mátrixát!

Megoldás: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

19. Tekintsük az alábbi polinomokat! $p_n : R \to R,\ x \mapsto x^n,\quad n = 0, 1, 2, 3, 4.$

Legyen $B_1 = \{p_0, p_1, p_2, p_3, p_4\}$ bázis a P_R^4 vektortérben, $B_2 = \{p_0, p_1, p_2, p_3\}$ bázis a P_R^3 vektortérben.

Adja meg az $A: P_R^4 \to P_R^3,\ p \mapsto p'$ (deriválás) lineáris leképezés $B_1 - B_2$ bázisokra vonatkozó mátrixát!

Megoldás: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$