

1. $S: 2x - y + 3z = 15$;

a) Írja fel annak az egyenesnek a paraméteres és paramétermentes egyenletrendszerét, amely merőleges az S síkra, és áthalad a $P = (6, 0, -4)$ ponton!

b) Írja fel annak a síknak az egyenletét, amely párhuzamos az S síkkal és illeszkedik a $P = (1, -2, 1)$ pontra!

(5 pont)

2. $\underline{a}_1 := (1, 2, 0, 3)$; $\underline{a}_2 := (0, 1, 0, 0)$; $\underline{a}_3 := (3, 8, 0, 9)$;
 $\underline{a}_4 := (1, 1, 1, 1)$; $\underline{x} := (2, 3, 4, 1)$.

Bázistranszformációt alkalmazva válaszoljon a kérdésekre! (Indoklás!)

a) Bázist alkotnak-e az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3$ és \underline{a}_4 vektorok az \mathbb{R}^4 vektortérben?

Ha igen, akkor határozza meg az \underline{x} vektor ezen bázisra vonatkozó koordinátáit!

b) $H := \{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \underline{a}_4, \underline{x}\}$. Van-e a H vektorhalmaznak olyan részhalmaza, amely bázis az \mathbb{R}^4 vektortérben?

c) Van-e H -nak három vektorból álló lineárisan független, illetve három vektorból álló lineárisan összefüggő részhalmaza?

d) Legyen

$$V_1 := \{\lambda_1 \cdot \underline{a}_1 + \lambda_2 \cdot \underline{a}_2 \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}, \quad V_2 := \{\lambda_1 \cdot \underline{a}_3 + \lambda_2 \cdot \underline{a}_4 \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}$$

Igaz-e hogy $\mathbb{R}^4 = V_1 \oplus V_2$? Válaszát indokolja! Ha igen, akkor bontsa fel az \underline{x} vektort V_1 -be és V_2 -be eső összetevőkre!

(8 pont)

3. Egy bázistranszformációs eljárás során a következő táblázathoz jutottunk:

bázis	\underline{a}_1	\underline{a}_2	\underline{a}_3	\underline{a}_4	\underline{a}_5
\underline{e}_1	0		0		
\underline{a}_2	-1		1		
\underline{a}_5	0		3		
\underline{a}_4	4		2		

Számolás nélkül válaszoljon az alábbi kérdésekre!(Indoklás!)

a) Töltse ki a táblázat hiányzó adatait!

b) Mennyi a $H = \{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \underline{a}_4, \underline{a}_5\}$ vektorhalmaz rangja?

c) Van-e a H -nak olyan részhalmaza, amely bázis az \mathbb{R}^4 vektortérben?

e) Előállítható-e az \underline{a}_1 illetve \underline{a}_5 vektor az \underline{a}_2 és \underline{a}_4 vektorok lineáris kombinációjaként? (5 pont)

4. $A := \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$; $B := [2 \ -1 \ 3]$; $C := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$; $D := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

a) Melyik létezik az alábbi mátrixok közül? Amelyik létezik, azt számítsa ki!

$$A^T \cdot C \cdot B, \quad B \cdot C \cdot A^T, \quad (B^T \cdot B + 2D) \cdot B^T$$

b) Invertálható-e a D mátrix? Ha igen, akkor határozza meg az inverzét!

(7 pont)