

Hatvány, gyök, logaritmus

egész kitevőjű hatvány
számok normálalakja

$$x > 0, x = N \cdot 10^k, \quad 1 \leq N < 10, \quad k \in \mathbb{Z}$$

a hatványozás azonosságai

$$\begin{aligned} a^n a^m &= a^{n+m}, \quad n, m \in \mathbb{Z}; \\ \frac{a^n}{a^m} &= a^{n-m}, \quad a \neq 0; \\ (a^n)^m &= a^{nm}; \quad (ab)^n = a^n b^n; \\ \left(\frac{a}{b}\right)^n &= \frac{a^n}{b^n}; \quad b \neq 0. \end{aligned}$$

négyzetgyök fogalma
négyzetgyök azonosságai
n-edik gyök
n-edik gyök azonosságai

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{ab} &= \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}; \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\} \\ \sqrt[n]{\frac{a}{b}} &= \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}; \quad b \neq 0; \\ \sqrt[n]{a^k} &= (\sqrt[n]{a})^k; \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

törtkitevőjű hatványok

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \quad a > 0; \quad m \in \mathbb{Z}; \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}.$$

logaritmus fogalma

logaritmus azonosságai $a > 0; a \neq 1; b, c > 0;$

$$\begin{aligned} \log_a(bc) &= \log_a b + \log_a c; \\ \log_a \frac{b}{c} &= \log_a b - \log_a c; \\ \log_a b^k &= k \log_a b; \\ \log_a \sqrt[n]{b} &= \frac{\log_a b}{n}; \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}; \\ \log_b x &= \frac{\log_a x}{\log_a b}; \quad x > 0; \quad b \neq 1 \end{aligned}$$

számtani, mértani és harmonikus közép fogalma

a számtani, mértani és a harmonikus közép vonatkozó egyenlőtlenség

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}; \quad \forall a_i > 0; \quad n \geq 2.$$

Feladatok

1. A következő állítások mely a értékekre igazak?

a. $\sqrt{a^2} = a$

b. $\sqrt{a^2} = -a$

c. $\sqrt{-a^2} = a$

d. $\sqrt[3]{a^3} = a$

e. $\sqrt{a^6} = a^3$

2. Hozzuk egyszerűbb alakra az alábbi kifejezéseket!

a. $\frac{(a^2)^3 a^4 (a^5)^2}{a^7 (a^2)^4}; a \neq 0$

d. $\frac{(2x+1)^2 - (3x-1)(3x+1) + 5x^2}{2x+1}; x \neq -\frac{1}{2}$

b. $\frac{(9x^2y^3)^4}{(5x^3y^4)^3} : \frac{(3xy^2)^6}{(5xy^5)^3}; x, y \neq 0$

e. $\frac{(7a^2b^6)^2}{(2a^3b^4)^3} : \frac{49a^3b^4}{(4a^4b^2)^2}; a, b \neq 0$

c. $\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b}{a}\right) : \left(\frac{a}{b^2} - \frac{1}{b} + \frac{1}{a}\right); a, b \neq 0$

f. $\frac{1 - \frac{x^2}{x^2-1}}{2 + \frac{3x-1}{1-x}}; |x| \neq 1$

a. $\left(\sqrt{6 + \sqrt{11}} + \sqrt{6 - \sqrt{11}}\right)^2$

d. $\frac{1}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}}; a \neq b$

b. $\sqrt{7 + 2\sqrt{6}} - \sqrt{7 - 2\sqrt{6}}$

e. $\frac{3}{\sqrt{7} - \sqrt{2}}$

c. $(\sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{81} - \sqrt[3]{192}) \cdot (\sqrt[3]{375} - \sqrt[3]{192})$

f. $\sqrt{x\sqrt{x^2}\sqrt[4]{x}}; x \geq 0$

a. $\log_c \sqrt{\frac{c}{d} \sqrt{\frac{d}{c} \sqrt{\frac{d^8}{c^5}}}}; d \neq 0, c > 0, c \neq 1$

d. $\log_c \left(\sqrt{c\sqrt{c\sqrt{c}}} \cdot \sqrt[3]{c^2\sqrt{c}}\right); c > 0, c \neq 1$

b. $\log_a \left(\left(3 - \frac{3a-2}{a+1}\right) \cdot \frac{a^2+a}{5}\right); a > 0, a \neq 1$

e. $\sqrt{a^{4+\log_a 36}}; a > 0, a \neq 1$

c. $\log_a \left(\left(\frac{a+2}{a-1} + \frac{a-2}{a+1}\right) : \frac{2(a^2+2)}{a(a^2-1)}\right); a > 0, a \neq 1$

f. $\sqrt{a^{6-\log_a 8}}; a > 0, a \neq 1$

3. Oldja meg az alábbi egyenleteket!

a. $\frac{9x-5}{3x+1} + \frac{12x+1}{2-6x} = \frac{9-108x+36x^2}{4(9x^2-1)}$

b. $\sqrt{8x^2 + 12x - 3} - \sqrt{2x} = 0$

c. $(x-3)^{x^2-3x} = (x-3)^{8x-30}$

d. $\frac{\lg(x+1)}{\lg x} = 2$