



Mátrixok

*Összeállította: dr. Leitold Adrien
egyetemi docens*

Mátrix

- **Mátrix:** téglalap alakú számtáblázat

$$A_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Jelölés: A , $A_{m \times n}$, $(a_{ij})_{m \times n}$

- **Mátrix típusa (rendje):** $m \times n$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

- m : sorok száma
- n : oszlopok száma

- **Mátrix (i, j) -edik eleme:** a_{ij}

- i : sorindex

$$i = 1, \dots, m$$

- j : oszlopindex

$$j = 1, \dots, n$$

Egyenlő mátrixok, mátrix transzponáltja

- Két mátrix egyenlő, ha típusuk megegyezik és a megfelelő elemeik rendre megegyeznek.
- **Mátrix transzponáltja:** Az A $m \times n$ -es mátrix transzponáltján azt az $n \times m$ -es mátrixot értjük, amelynek (i,j) -edik eleme egyenlő az A mátrix (j,i) -edik elemével. Jel.: A^T

Megjegyzés: A transzponált mátrixot az eredeti A mátrixból a sorok és oszlopok felcserélésével kapjuk.

$$A_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \Rightarrow A_{n \times m}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Speciális mátrixok

- Sorvektor: $(1 \times n)$ -es mátrix, Jel.: $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n)$
- Oszlopvektor: $(n \times 1)$ -es mátrix,

Jel.:

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

- Négyzetes mátrix: $(n \times n)$ -es mátrix

$$A_{n \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

főátló (fődiagonál):

$$a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$$

Speciális mátrixok (folyt.)

- **Diagonális mátrix:** olyan négyzetes mátrix, amelynek a főátlón kívüli elemei mind nullák.

$$A_{n \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$$

- **Szimmetrikus mátrix:** olyan $A=(a_{ij})_{n \times n}$ négyzetes mátrix, melyben $a_{ij}=a_{ji} \quad i, j = 1, \dots, n$.

Megjegyzés:

$$A \text{ szimmetrikus} \iff A = A^T$$

Speciális mátrixok (folyt.)

- **Egységmátrix:** olyan diagonális mátrix, amelynek főátlójában egyesek állnak.

$$E_{n \times n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

- **Nullmátrix:** olyan mátrix, amelynek minden eleme nulla.

$$0_{m \times n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Mátrixműveletek

■ Mátrixok összeadása:

Legyen $A = (a_{ij})_{m \times n}$ és $B = (b_{ij})_{m \times n}$ két azonos méretű mátrix. Ekkor A és B összege:

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}$$

■ Mátrix skalárral való szorzása:

Legyen $A = (a_{ij})_{m \times n}$ és $\lambda \in R$. Ekkor az A mátrix λ -szorososa:

$$\lambda \cdot A = (\lambda \cdot a_{ij})_{m \times n}$$

■ Két mátrix különbsége: származtatott művelet

$$A - B = A + (-1) \cdot B = (a_{ij} - b_{ij})_{m \times n}$$

Az összeadás és a skalárral való szorzás tulajdonságai

■ A mátrixösszeadás és skalárral való szorzás tulajdonságai:

1. $(A + B) + C = A + (B + C)$

2. $A + B = B + A$

3. $A + 0 = A$

4. $A + (-A) = 0$, ahol a $-A = (-1) \cdot A$ mátrixot az A mátrix ellentettjének nevezzük.

5. $(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A$

6. $\lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$

7. $\lambda \cdot (\mu \cdot A) = (\lambda \cdot \mu) \cdot A$

8. $1 \cdot A = A$

Mátrixműveletek (folyt.)

- **Mátrixok szorzása:**

Legyenek $A = (a_{ij})_{m \times n}$ és $B = (b_{jk})_{n \times p}$ mátrixok. Ekkor az A és B mátrixok szorzata az a C $m \times p$ -s mátrix, amelynek (i,k) -adik eleme:

$$c_{ik} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + \dots + a_{in} \cdot b_{nk}$$

Figyelem! Két mátrix összeszorozhatóságának feltétele, hogy az első mátrix oszlopainak száma megegyezzen a második mátrix sorainak számával.

- **Mátrix hatványa:** Ha A négyzetes mátrix, akkor

$$A^n = A \cdot A \cdot \dots \cdot A \quad (n\text{-szer szorozzuk } A\text{-t önmagával, ahol } n \text{ pozitív egész})$$

A mátrixszorzás tulajdonságai

■ A mátrixszorzás tulajdonságai:

1. Általában: $A \cdot B \neq B \cdot A$ (nem kommutatív)
2. Asszociatív, azaz ha az $A \cdot (B \cdot C)$ szorzat létezik, akkor az $(A \cdot B) \cdot C$ szorzat is létezik és

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$$

3. $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ (balról disztributív)
4. $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$ (jobbról disztributív)
5. Zérusosztós művelet, azaz két mátrix szorzata úgy is lehet nullmátrix, hogy a két mátrix egyike sem nullmátrix.
6. $A_{m \times n} \cdot O_{n \times p} = O_{m \times p}$, illetve $O_{m \times n} \cdot A_{n \times p} = O_{m \times p}$
7. $A_{m \times n} \cdot E_{n \times n} = A_{m \times n}$, illetve $E_{m \times m} \cdot A_{m \times n} = A_{m \times n}$
8. $(\lambda \cdot A) \cdot B = A \cdot (\lambda \cdot B)$

Mátrix oszlopvektorai

- Tekintsünk egy mátrixot!

$$A_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- Oszlopvektorok: $A = [\underline{a}_1 \dots \underline{a}_n]$

$$\text{ahol } \underline{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \dots, \underline{a}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

n darab m dimenziós oszlopvektor

Mátrix sorvektorai

- Tekintsünk egy mátrixot!

$$A_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- Sorvektorok:

$$A_{m \times n} = \begin{bmatrix} \underline{a}^1 \\ \vdots \\ \underline{a}^m \end{bmatrix}$$

ahol $\underline{a}^1 = (a_{11}, \dots, a_{1n})$, \dots , $\underline{a}^m = (a_{m1}, \dots, a_{mn})$

m darab n dimenziós sorvektor

Mátrix rangja

- **Mátrix oszloprangja:**

Egy mátrix oszloprangján az oszlopvektoraiból álló vektorhalmaz rangját értjük, azaz ha

$$A_{m \times n} = [\underline{a}_1 \ \dots \ \underline{a}_n], \text{ akkor } r_o(A) = r(\{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n\}).$$

- **Mátrix sorrangja:**

Egy mátrix sorrangján a sorvektoraiból álló vektorhalmaz rangját értjük, azaz ha

$$A_{m \times n} = \begin{bmatrix} \underline{a}^1 \\ \vdots \\ \underline{a}^m \end{bmatrix}, \text{ akkor } r_s(A) = r(\{\underline{a}^1, \dots, \underline{a}^m\}).$$

- Igazolható, hogy bármely mátrix esetén a sor- és oszloprang megegyezik. Ezt a közös értéket röviden a **mátrix rangjának** nevezzük:

$$r(A) = r_s(A) = r_o(A)$$

A transzponálásra vonatkozó szabályok (állítások)

- A transzponálásra vonatkozó szabályok:
 - $(A^T)^T = A$
 - $(A + B)^T = A^T + B^T$
 - $(\lambda \cdot A)^T = \lambda \cdot A^T$
 - $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$
 - $r(A) = r(A^T)$

Négyzetes mátrix inverze

- Invertálhatóság, inverzmátrix:

Legyen A egy $n \times n$ -es négyzetes mátrix. A -t invertálhatónak nevezünk, ha van olyan X $n \times n$ -es mátrix, melyre $A \cdot X = X \cdot A = E_{n \times n}$.

Ekkor X -t az A mátrix inverzének hívjuk és A^{-1} -gyel jelöljük.

- Az invertálhatóság feltétele:

Az A $n \times n$ -es mátrix invertálható $\Leftrightarrow r(A) = n$.

Mátrix invertálása bázistranszformációval

- Legyen $A_{n \times n} = [\underline{a}_1 \dots \underline{a}_n]$ egy négyzetes mátrix. Ekkor az A^{-1} inverzmátrix az $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ kanonikus bázisvektoroknak az $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ vektorokra, mint bázisra vonatkozó koordinátáiból épül fel.

$$\begin{array}{c|ccc|ccc} & \underline{a}_1 & \dots & \underline{a}_n & \underline{e}_1 & \dots & \underline{e}_n \\ \hline \underline{e}_1 & & & & & & \\ \vdots & & & & & & \\ \underline{e}_n & & & & & & \end{array} \quad \mathbf{A} \quad \mathbf{E} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c|ccc} & \underline{e}_1 & \dots & \underline{e}_n \\ \hline \underline{a}_1 & & & \\ \vdots & & & \\ \underline{a}_n & & & \end{array} \quad \mathbf{A}^{-1}$$

Az invertálás szabályai (állítások)

■ Az invertálás szabályai:

Legyenek A és B invertálható $n \times n$ -es mátrixok.
Ekkor:

- A^{-1} invertálható és $(A^{-1})^{-1} = A$.
- $A \cdot B$ invertálható és $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.
- A^T invertálható és $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.
- $\lambda \cdot A$ invertálható és $(\lambda \cdot A)^{-1} = 1/\lambda \cdot A^{-1}$, ahol λ nullától különböző valós szám.

Négyzetes mátrix determinánása

- **Részmátrix:**

Legyen $A = (a_{ij})$ $n \times n$ -es mátrix. Az A mátrix a_{ij} elemhez tartozó részmátrixán azt az $(n-1) \times (n-1)$ -es mátrixot értjük, amelyet az A mátrixból annak i -edik sorát és j -edik oszlopát elhagyva kapunk. Jel.: A_{ij} .

- **Négyzetes mátrix determinánása: (rekurzív definíció)**

1. Legyen $A = [a_{11}]$ 1×1 -es mátrix. Ekkor A determinánása:
 $\det(A) = a_{11}$.
2. Legyen $A = (a_{ij})$ $n \times n$ -es mátrix, ahol $n \geq 2$. Ekkor A determinánása: **(első sor szerinti kifejtés)**

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{1j} \det(A_{1j})$$

Négyzetes mátrix determinánása (folyt.)

- A definícióból adódó észrevételek:

- 2x2-es mátrix determinánása:

$$\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

(„főátlóbeli elemek szorzata mínusz mellékátlóbeli elemek szorzata”)

- A determináns meghatározásának számolási igénye rohamosan növekszik a mátrix méretével.
- Diagonális mátrix determinánása egyenlő a főátlóbeli elemek szorzatával.

Sorok és oszlopok szerinti kifejtés tétele

- Egy négyzetes mátrix determinánása bármelyik sor ill. oszlop szerint kifejtve megkapható.
 - Az i -edik sor szerinti kifejtés képlete:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

- A j -edik oszlop szerinti kifejtés képlete:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

- **Következmény:** $\det(A) = \det(A^T)$.

A determináns tulajdonságai (állítások)

A determináns tulajdonságai egyaránt igazak sorokra és oszlopokra megfogalmazva.

1. Ha a mátrix valamely oszlopában csupa nulla áll, akkor a determináns értéke 0.
2. Ha a mátrix két tetszőleges oszlopát felcseréljük, a determináns (-1) -szeresére változik.
3. Ha a mátrixban van két azonos oszlop, akkor a determináns értéke 0.
4. Legyen $A_{n \times n} = [\underline{a}_1 \dots \underline{a}_j \dots \underline{a}_n]$, ahol $\underline{a}_j = \underline{a}_j' + \underline{a}_j''$. Ekkor:
$$\det(A) = \det([\underline{a}_1 \dots \underline{a}_j' \dots \underline{a}_n]) + \det([\underline{a}_1 \dots \underline{a}_j'' \dots \underline{a}_n]).$$

A determináns tulajdonságai (folyt.)

5. Legyen $A_{n \times n} = [\underline{a}_1 \dots \underline{a}_j \dots \underline{a}_n]$, ahol $\underline{a}_j = \lambda \cdot \underline{a}_j'$. Ekkor:

$$\det(A) = \lambda \cdot \det([\underline{a}_1 \dots \underline{a}_j' \dots \underline{a}_n]).$$

6. Legyen A $n \times n$ -es mátrix és $\lambda \in R$. Ekkor:

$$\det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \cdot \det(A).$$

7. Ha a mátrix valamely oszlopához hozzáadjuk egy másik oszlop skalárszorosát (azaz ún. **elemi oszlopátalakítást** hajtunk végre), akkor a determináns értéke nem változik.

8. Szorzás-tétel: Legyenek A és B $n \times n$ -es mátrixok. Ekkor:

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B).$$

9. Legyen A invertálható mátrix. Ekkor:

$$\det(A^{-1}) = 1 / \det(A).$$

Négyzetes mátrixok osztályozása

Nemszinguláris mátrixok

Az alábbi állítások ekvivalensek:

- oszlopvektorok lineárisan függetlenek
- $r(A_{n \times n}) = n$ (a mátrix teljes rangú)
- invertálható
- $\det(A) \neq 0$

Szinguláris mátrixok

Az alábbi állítások ekvivalensek:

- oszlopvektorok lineárisan összefüggőek
- $r(A_{n \times n}) < n$ (a mátrix nem teljes rangú)
- nem invertálható
- $\det(A) = 0$

A determináns alkalmazása 1.

Négyzetes mátrix adjungáltja és az inverzmátrix

■ Négyzetes mátrix adjungáltja:

Legyen $A = (a_{ij})_{n \times n}$ egy négyzetes mátrix. Ekkor az A mátrix adjungáltja az az $n \times n$ -es mátrix, amelynek (i, j) -edik eleme: $(-1)^{i+j} \cdot \det(A_{ji})$. Jel.: $adj(A)$

Megjegyzés: A fenti definíció alapján levezethető, hogy egy 2×2 -es mátrix adjungáltját megkaphatjuk úgy, hogy a főátlóban lévő elemeket megcseréljük, a mellékátlóban lévő elemeket pedig szorozzuk -1 -gyel.

■ Az adjungált és az inverzmátrix kapcsolata:

Legyen az A négyzetes mátrix invertálható. Ekkor:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot adj(A)$$

A determináns alkalmazása 2.

A vektoriális szorzat számolása

Legyen $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$ és $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3)$ két tetszőleges térbeli vektor. Ekkor az $\underline{a} \times \underline{b}$ vektoriális szorzat megkapható az alábbi determináns első sor szerinti formális kifejtésével:

$$\underline{a} \times \underline{b} = \det \begin{pmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}.$$