Komplex számok

Elmélet

Definition 1 (Definíció) *Tekintsük az* $\mathbb{R}^2$ *halmazt és értelmezzük az alábbi műveleteket.*

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)\,,$$

$$(a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd,bc+ad)\,.$$

Az ezen műveletekkel együtt tekintett halmazt a komplex számok halmazának nevezzük. Jele: $\mathbb{C}$.

Definition 2 (Definíció) *A* $(0,1)$ *komlex számot imaginárius (képzetes) egységnek nevezzük és* $i-$*vel jelöljük.*

Theorem 3 (Tétel) $i^2=-1$.

Az (a,b) komplex szám $a+bi$ alakját a szám kanonikus alakjának nevezzük.

Theorem 4 (Tétel) *Legyen* $z_1=a_1+b_1i$ *és* $z_2=a_2+b_2i$. *Ekkor*

$$z_1+z_2=a_1+a_2+(b_1+b_2)i,$$

és tetszőleges $\lambda\in\mathbb{R}$*-re*

$$\lambda z=\lambda a+\lambda bi.$$

Definition 5 (Definíció) *A* $z=a+bi$ *komplex szám valós része* $\operatorname{Re}(z)=a$, *és képzetes része* $\operatorname{Im}(z)=b$.

Definition 6 (Definíció) *A* $z=a+bi$ *szám* $\bar{z}$ *konjugáltja alatt a*

$$\bar{z}=a-bi$$

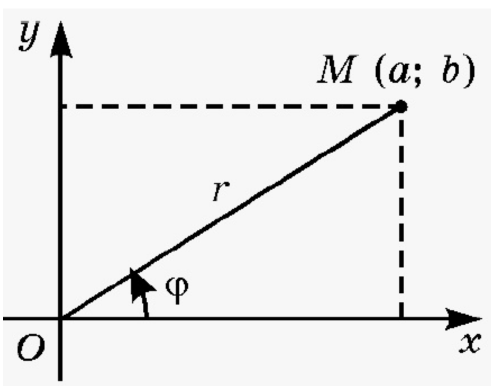
komplex számot értjük.

Definition 7 (Definíció) *A* $z=a+bi$ *szám abszolútértéke alatt a*

$$|z|=\sqrt{a^2+b^2}$$

valós számot értjük.

A komplex számokat ábrázolhatjuk a síkon. A $z=a+bi$ komplex számhoz tartozik az (a,b) pont és a hozzá tartozó helyvektor. Ennek a vektornak a hossza a komplex szám abszolút értéke. A komplex szám argumentuma vagy irányszöge az φ szög, amelyet a z helyvektor az x tengely pozitív felével bezár.



Theorem 8 (Tétel) *Minden nullától különböző $z = a+bi$ komplex szám egyértelműen felírható*

$$z = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$$

alakban, ahol r pozitív valós szám és φ nemnegatív, $360°-$nál kisebb szög.

A

$$z = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$$

alakot a komplex szám trigonometrikus alakjának nevezzük, ahol

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

és $z \neq 0$ esetén

$$\varphi = \begin{cases} 0, & \text{ha } a > 0 \text{ és } b = 0, \\ \alpha, & \text{ha } a, b > 0, \\ \dfrac{\pi}{2}, & \text{ha } a = 0 \text{ és } b > 0, \\ \pi - \alpha, & \text{ha } a < 0 \text{ és } b > 0, \\ \pi, & \text{ha } a < 0 \text{ és } b = 0, \\ \pi + \alpha, & \text{ha } a, b < 0, \\ \dfrac{3\pi}{2}, & \text{ha } a = 0 \text{ és } b < 0, \\ 2\pi - \alpha, & \text{ha } a > 0 \text{ és } b < 0, \end{cases}$$

ahol

$$\alpha = \arctan\left(\left|\frac{b}{a}\right|\right).$$

Theorem 9 (Tétel) *Legyen $z_1 = r_1(\cos(\varphi_1)+i\sin(\varphi_1))$ és $z_2 = r_2(\cos(\varphi_2)+i\sin(\varphi_2))$. Ekkor*

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)),$$

és

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

Theorem 10 (Tétel) *Legyen $z = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$ és n egész. Ekkor*

$$z^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)).$$

Theorem 11 (Tétel) *A $z = r(\cos(\varphi)+i\sin(\varphi))$ komplex számnak n számú páronként különböző n-edik gyöke van, amelyeket az alábbi képlettel adhatunk meg.*

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}(\cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)),$$

ahol $0 \leq k \leq n-1$, k egész szám.

Feladatok

1. Adja meg a
$$-2+3i$$
komplex szám trigonometrikus alakját és a tizedik gyökeit!

2. Adja meg a
$$-3+2i$$
komplex szám trigonometrikus alakját és a nyolcadik gyökeit!

3. Adja meg a
$$-1-3i$$
komplex szám trigonometrikus alakját és a hatodik gyökeit!

4. Adja meg a
$$2-5i$$
komplex szám trigonometrikus alakját és a nyolcadik gyökeit!

5. Adja meg a
$$1-3i$$
komplex szám trigonometrikus alakját és a ötödik gyökeit!

6. Adja meg a
$$-2+i$$
komplex szám trigonometrikus alakját és a hatodik gyökeit!

7. Adja meg a
$$2-3i$$
komplex szám trigonometrikus alakját és a tizedik gyökeit!

8. Oldja meg a komplex számok körében az alábbi egyenletet!

a.
$$(\operatorname{Re}(z))^2 i + 2\bar{z}^2 = |z|^2 - \operatorname{Im}(z),$$

b.
$$(\operatorname{Im}(z))^2 - \bar{z}^2 i = |z|^2 + \operatorname{Re}(z),$$

c.
$$|z|^2 - 2\operatorname{Re}(z)\operatorname{Im}(z)\, i = \bar{z} + 2,$$

d.
$$|z|\, i + -2\operatorname{Re}(z) = -\operatorname{Im}(z)\,\bar{z},$$

e.
$$|z|^2 + 2\operatorname{Re}(z)\operatorname{Im}(z)\, i = \bar{z},$$

f.
$$2|z|^2 + \operatorname{Im}(z)\, i = \operatorname{Re}(z)\,\bar{z} + 4,$$

g.
$$|z|^2 = 2\operatorname{Im}(z)\,\bar{z} + z,$$

h.
$$2z\operatorname{Re}(z) - \operatorname{Im}(z)\, i = 3\bar{z} + |z|^2,$$

i.

$$|z|^2 + \bar{z} + i = \mathrm{Re}\,(z)\, i - 8\,\mathrm{Im}\,(z)\,,$$

j.

$$\bar{z} - |z|^2 = z\,\mathrm{Re}\,(z) - 4\,\mathrm{Im}\,(z)\,,$$

9. Ábrázolja a komplex számsíkon azoknak a z komplex számoknak a hallmazát, amelyekre teljesül az alábbi egyenlőtlenség!

$$|z - i| \leq |z + 3|$$

10. Ábrázolja a komplex számsíkon azoknak a z komplex számoknak a hallmazát, amelyekre teljesül az alábbi egyenlőtlenség!

$$|z + 2i| \leq |z - 4|$$