

Határozott integrál

Elmélet

A Riemann-integrál definíciója

Definition 1 (Definíció) Az $[a, b] \subset \mathbb{R}$ intervallum felosztásán olyan véges $\{x_0, \dots, x_k\}$ sorozatot értünk, amelyre

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b.$$

Definition 2 (Definíció) Legyen adva egy korlátos f függvény az $[a, b]$ intervallumon és $\Phi = \{x_0, \dots, x_k\}$ legyen $[a, b]$ egy felosztása. A korlátosság miatt minden $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ esetén az

$$m_i = \inf f([x_{i-1}, x_i]), \quad M_i = \sup f([x_{i-1}, x_i])$$

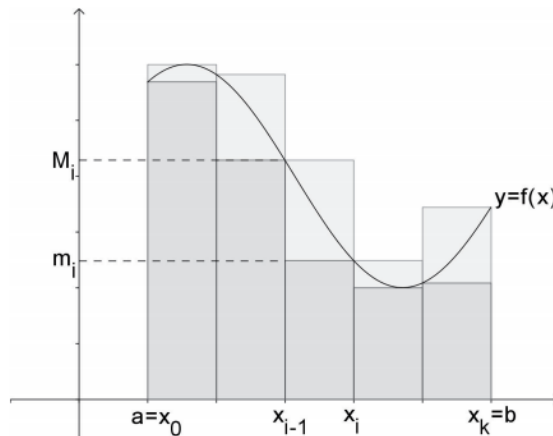
számok jól definiáltak. Az

$$s_\Phi = \sum_{i=1}^k m_i (x_i - x_{i-1})$$

összeget az f függvény Φ felosztáshoz tartozó **alsó összegének**, az

$$S_\Phi = \sum_{i=1}^k M_i (x_i - x_{i-1})$$

összeget az f függvény Φ felosztáshoz tartozó **felső összegének** nevezzük (lásd az alábbi ábrán).



Ha f korlátos $[a, b]$ -n, akkor $[a, b]$ bármely Φ felosztására

$$\inf f([a, b]) \cdot (b - a) \leq s_\Phi \leq S_\Phi \leq \sup f([a, b]) \cdot (b - a).$$

Definition 3 (Definíció) Bármely $[a, b]$ -n korlátos f esetén legyen

$$I_A = \sup\{s_\Phi \mid \Phi \text{ az } [a, b] \text{ felosztása}\},$$

és

$$I_F = \inf\{S_\Phi \mid \Phi \text{ az } [a, b] \text{ felosztása}\}.$$

Az I_A számot az f függvény (**Darboux-féle**) **alsó integráljának**, az I_F számot pedig f (**Darboux-féle**) **felső integráljának** nevezzük.

Definition 4 (Definíció) Az f függvényt integrálhatónak mondjuk az $[a, b] \subset \mathbb{R}$ intervallumon, ha f korlátos $[a, b]$ -n és $I_A = I_F$. Ekkor az $I = I_A = I_F$ közös értéket az f függvény $[a, b]$ -n vett **Riemann-féle határozott integráljának**, vagy röviden **Riemann-integráljának** nevezzük. Jele:

$$\int_a^b f \text{ vagy } \int_a^b f(x) dx.$$

A Riemann-integrál tulajdonságai

Theorem 5 (Tétel) Ha f és g integrálható az $[a, b] \subset \mathbb{R}$ intervallumon és α, β állandók, akkor $\alpha f + \beta g$ is integrálható az $[a, b]$ -n, és

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g.$$

Theorem 6 (Tétel) Ha f integrálható az $[a, b]$ intervallumon és $c \in (a, b)$, akkor f integrálható $[a, c]$ -n és $[c, b]$ -n is, és

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

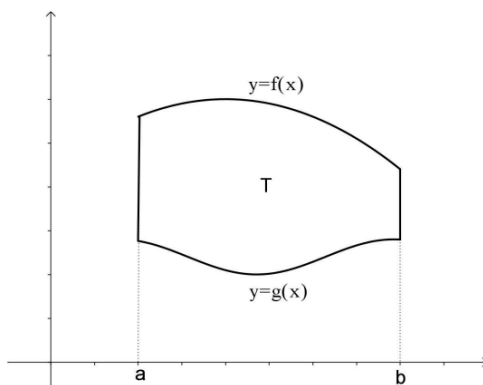
Theorem 7 (Tétel) (Newton-Leibniz-szabály). Ha f integrálható az $[a, b] \subset \mathbb{R}$ intervallumon, F folytonos $[a, b]$ -n, továbbá F primitív függvénye f -nek (a, b) -n, akkor

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Definition 8 (Definíció) Legyen $[a, b] \subset \mathbb{R}$ intervallum. Az $F(b) - F(a)$ különbséget az $[F(x)]_a^b$ szimbólummal jelöljük, és az F függvény $[a, b]$ intervallumon vett megváltozásának nevezzük.

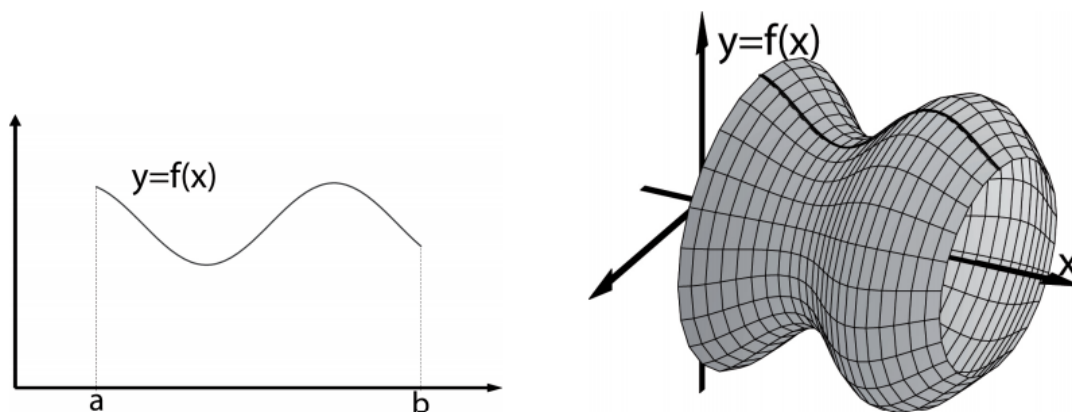
Theorem 9 (Tétel) (Területszámítás). Legyen $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy f és g olyan folytonos függvények $[a, b]$ -n, amelyekre $g \leq f$ az $[a, b]$ -n. Annak a síkidomnak a területe, amelyet felülről f grafikonja, alulról g grafikonja, oldalról pedig az $x = a$ és $x = b$ egyenesek határolnak (lásd az alábbi ábrán)

$$T = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx.$$



Theorem 10 (Tétel) (Forgástest térfogata). Ha f nemnegatív folytonos függvény az $[a, b] \subset \mathbb{R}$ intervallumon, akkor annak a testnek a térfogata, amely f grafikonjának az x -tengely körüli megforgatásával keletkezik (lásd az alábbi ábrán)

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$



Feladatok

1. Számítsa ki az alábbi integrált!

(a)

$$\int_1^2 \left(e^{2x} - \frac{1}{x^4} \right) dx,$$

(b)

$$\int_0^1 (3x^2 + 2) 2^{(2x^3+4x)} dx,$$

(c)

$$\int_0^1 x (2 + x^2)^9 dx,$$

(d)

$$\int_0^1 x^2 \sin(x^3) dx,$$

(e)

$$\int_1^2 (5x + \sqrt{x} - 2^x) dx,$$

(f)

$$\int_0^1 (4x^3 - 6x) \cos(x^4 - 3x^2) dx,$$

(g)

$$\int_0^\pi \cos(2x) dx,$$

(h)

$$\int_0^1 \left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{x+1} \right) dx,$$

(i)

$$\int_0^\pi x \cos\left(\frac{x}{2}\right) dx,$$

(j)

$$\int_0^1 \frac{4x+1}{x^2+9} dx,$$

(k)

$$\int_0^1 x^2 (1+x^3)^9 dx,$$

(l)

$$\int_0^1 x^2 e^{2x} dx,$$

(m)

$$\int_0^1 x e^x dx,$$

(n)

$$\int_0^1 \frac{x+2}{x^2+4x+8} dx$$

(o)

$$\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^2(x)} dx.$$

2. Számítsa ki annak a síkidomnak a területét, amelyet az $y = x^2 + 2x$ és az $y = x + 2$ görbék határolnak!
3. Számítsa ki annak a síkidomnak a területét, amelyet az $y = x^2 + 1$ és az $y = -x + 7$ görbék határolnak!
4. Számítsa ki annak a síkidomnak a területét, amelyet az $y = x^2 - 4$ és az $y = -x + 2$ görbék határolnak!
5. Számítsa ki annak a síkidomnak a területét, amelyet az $y = x^2 - 4$ és az $y = 1 - 4x$ görbék határolnak!
6. Számítsa ki annak a síkidomnak a területét, amelyet az $y = -x^2 + 1$ és az $y = 0$ görbék határolnak!
7. Számítsa ki annak a síkidomnak a területét, amelyet az $y = x^2 - 2x$ és az $y = 4x - x^2$ görbék határolnak!
8. Számítsa ki annak a síkidomnak a területét, amelyet az $y = x^2 - 6x$ és az $y = 4x - x^2$ görbék határolnak!
9. Számítsa ki annak a testnek a térfogatát, amely az

$$f(x) = 2 + x, \quad x \in [0, 1]$$

függvény grafikonjának x tengely körüli megforgatásával keletkezik!

10. Számítsa ki annak a testnek a térfogatát, amely az

$$f(x) = x^3, \quad x \in [2, 5]$$

függvény grafikonjának x tengely körüli megforgatásával keletkezik!

11. Számítsa ki annak a testnek a térfogatát, amely az

$$f(x) = \sqrt{\ln(x)}, \quad x \in [1, e]$$

függvény grafikonjának x tengely körüli megforgatásával keletkezik!

12. Számítsa ki annak a testnek a térfogatát, amely az

$$f(x) = 3^x, \quad x \in [0, 1]$$

függvény grafikonjának x tengely körüli megforgatásával keletkezik!

13. Számítsa ki annak a testnek a térfogatát, amely az

$$f(x) = \sqrt{xe^x}, \quad x \in [1, 3]$$

függvény grafikonjának x tengely körüli megforgatásával keletkezik!

14. Számítsa ki annak a testnek a térfogatát, amely az

$$f(x) = \sqrt{e^x}, \quad x \in [0, 3]$$

függvény grafikonjának x tengely körüli megforgatásával keletkezik!