Differenciálegyenletek

Elmélet

Szeparálható (szétválasztható) változójú differenciálegyenlet

$T = I_1 \times I_2$ tartományon

$$x'(t) = g(t) \cdot h(x(t))$$

ahol g folytonos $I_1 - en$, h folytonos $I_2 - n$ és h függvénynek nincs zérushelye $I_2 - n$.

Kezdetiérték probléma megoldása

$$x'(t) = g(t) \cdot h(x(t)),$$

$$x(t_0) = x_0$$

$$\frac{x'(t)}{h(x(t))} = g(t)$$

$$\int_{t_0}^{t} \frac{x'(s)}{h(x(s))} ds = \int_{t_0}^{t} g(s)\, ds$$

$$x(s) = r, \quad x'(s)\, ds = dr$$

$$\int \frac{x'(s)}{h(x(s))} ds = \int \frac{1}{h(r)} dr$$

Szeparálható változójú differenciálegyenletre visszavezethető differenciálegyenlet

1. *Változóiban homogén differenciálegyenlet*

$$x'(t) = F\left(\frac{x(t)}{t}\right)$$

Kezdetiérték probléma megoldása

$$x'(t) = F\left(\frac{x(t)}{t}\right),$$

$$x(t_0) = x_0$$

Az

$$\frac{x(t)}{t} = y(t)$$

helyettesítéssel

$$x'(t) = t \cdot y'(t) + y(t),$$

így

$$t \cdot y'(t) + y(t) = F(y(t)).$$

Az

$$y'(t) = \frac{F(y(t)) - y(t)}{t},$$

$$y(t_0) = \frac{x(t_0)}{t_0}$$

(szeparálható változójú) kezdetiérték feladatot oldjuk meg.

2.

$$x'(t) = F(at + bx(t) + c),$$

ahol $b \neq 0$.

Kezdetiérték probléma megoldása

$$x'(t) = F(at + bx(t) + c),$$

$$x(t_0) = x_0$$

Az

$$at + bx(t) + c = y(t)$$

helyettesítéssel

$$x'(t) = \frac{y'(t) - a}{b},$$

így

$$\frac{y'(t) - a}{b} = F(y(t)).$$

Az

$$y'(t) = bF(y(t)) + a,$$

$$y(t_0) = at_0 + bx(t_0) + c$$

(szeparálható változójú) kezdetiérték feladatot oldjuk meg.

Elsőrendű lineáris differenciálegyenlet

$$x'(t) = a(t)x(t) + b(t)$$

$b(t) = 0$: homogén

$b(t) \neq 0$: inhomogén

Kezdetiérték probléma megoldása

$$x'(t) = a(t)x(t) + b(t),$$

$$x(t_0) = x_0$$

$$\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds \quad := A(t) \quad A(t_0)=0$$

$$/ \cdot e^{-A(t)}$$

$$\begin{aligned}
x'(t)\,e^{-A(t)} &= e^{-A(t)}a(t)\,x(t) + e^{-A(t)}b(t) \\
x'(t)\,e^{-A(t)} - e^{-A(t)}a(t)\,x(t) &= e^{-A(t)}b(t) \\
\left[x(t)\,e^{-A(t)}\right]' &= e^{-A(t)}b(t) \\
\int_{t_0}^{t} \left[x(s)\,e^{-A(s)}\right]' ds &= \int_{t_0}^{t} e^{-A(s)}b(s)\,ds \\
x(t)\,e^{-A(t)} - x(t_0)\,e^{-A(t_0)} &= \int_{t_0}^{t} e^{-A(s)}b(s)\,ds \\
x(t)\,e^{-A(t)} &= x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{-A(s)}b(s)\,ds \\
x(t) &= e^{A(t)}x(t_0) + e^{A(t)}\int_{t_0}^{t} e^{-A(s)}b(s)\,ds
\end{aligned}$$

Bernulli-féle differenciálegyenlet

$$x'(t) + a(t)\,x(t) = b(t)\,x^{\alpha}(t),$$

ahol $\alpha \neq 0, 1$.

Kezdetiérték probléma megoldása

$$x'(t) + a(t)\,x(t) = b(t)\,x^{\alpha}(t),$$
$$x(t_0) = x_0$$

Lineáris differenciálegyenletre visszavezethető az

$$\frac{x(t)}{x^{\alpha}(t)} = y(t)$$

helyettesítéssel. Ekkor az

$$y'(t) + (1-\alpha)\,a(t)\,x(t) = (1-\alpha)\,b(t),$$
$$y(t_0) = (x(t_0))^{1-\alpha}$$

feladatot oldjuk meg.

Másodrendű, konstans együtthatós (autonóm), lineáris differenciálegyenletek

$$x''(t) + ax'(t) + bx(t) = c(t)$$

$c(t) = 0$: homogén

$c(t) \neq 0$: inhomogén

Kezdetiérték probléma megoldása (homogén)

$$x''(t) + ax'(t) + bx(t) = 0,$$

$$\begin{aligned} x(t_0) &= x_0, \\ x'(t_0) &= x_1 \end{aligned}$$

A homogén egyenlet általános megoldása

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

A karakterisztikus egyenlet gyökei alapján

1. két különböző valós gyök λ_1 és λ_2, ekkor az általános megoldás

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}.$$

2. egy kétszeres valós gyök λ, ekkor az általános megoldás

$$x(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t}.$$

3. két különböző komplex gyök $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ és $\lambda_2 = \alpha - i, \beta$ ekkor az általános megoldás

$$x(t) = c_1 e^{\alpha t} \cos(\beta t) + c_2 e^{\alpha t} \sin(\beta t).$$

A kezdetiérték probléma egyértelmű megoldásának meghatározása
Az általános megoldásban szereplő c_1 és c_2 konstansok meghatározása az

$$\begin{aligned} x(t_0) &= x_0, \\ x'(t_0) &= x_1 \end{aligned}$$

kezdeti feltételből.

Az inhomogén egyenlet partikuláris $(x_p(t))$ megoldásának meghatározása, speciális inhomogén tag esetén (próbafüggvény módszere)

$$x''(t) + ax'(t) + bx(t) = c(t),$$

1. $$c(t) = P(t)$$

   (a) A *nulla* karakterisztikus gyöke a homogén egyenletnek.

   $$x_p(t) = tQ(t),$$

   ahol P és Q azonos fokszámú polinom. A Q polinom együtthatóinak meghatározása a feladat.

(b) A *nulla* **nem** karakterisztikus gyöke a homogén egyenletnek.

$$x_p(t) = Q(t),$$

ahol P és Q azonos fokszámú polinom. A Q polinom együtthatóinak meghatározása a feladat.

2.

$$c(t) = P(t)\, e^{\alpha t}$$

(a) Az α karakterisztikus gyöke a homogén egyenletnek ($m = 1$ vagy 2 multiplicitással).

$$x_p(t) = t^m Q(t)\, e^{\alpha t},$$

ahol P és Q azonos fokszámú polinom. A Q polinom együtthatóinak meghatározása a feladat.

(b) A α **nem** karakterisztikus gyöke a homogén egyenletnek.

$$x_p(t) = Q(t)\, e^{\alpha t},$$

ahol P és Q azonos fokszámú polinom. A Q polinom együtthatóinak meghatározása a feladat.

3.

$$c(t) = P(t)\, e^{\alpha t} \cos(\beta t),$$

vagy

$$c(t) = P(t)\, e^{\alpha t} \sin(\beta t),$$

vagy

$$c(t) = P_1(t)\, e^{\alpha t} \cos(\beta t) + P_2(t)\, e^{\alpha t} \sin(\beta t)$$

(a) Az $\alpha+\beta i$ karakterisztikus gyöke a homogén egyenletnek ($m = 1$ vagy 2 multiplicitással).

$$x_p(t) = t^m \left(Q_1(t)\, e^{\alpha t} \cos(\beta t) + Q_2(t)\, e^{\alpha t} \sin(\beta t)\right),$$

ahol Q_1 és Q_2 fokszáma $= \max(P_1$ fokszáma$, P_2$ fokszáma$)$. A Q_1 és Q_2 polinom együtthatóinak meghatározása a feladat.

(b) A $\alpha + \beta i$ **nem** karakterisztikus gyöke a homogén egyenletnek.

$$x_p(t) = Q_1(t)\, e^{\alpha t} \cos(\beta t) + Q_2(t)\, e^{\alpha t} \sin(\beta t),$$

ahol Q_1 és Q_2 fokszáma $= \max(P_1$ fokszáma$, P_2$ fokszáma$)$. A Q_1 és Q_2 polinom együtthatóinak meghatározása a feladat.