1. A Laplace-transzformált

1.1. A Laplace-transzformált és fontosabb tulajdonságai

Jelölje $\mathbb{R}$ a valós számok és $\mathbb{C}$ a komplex számok halmazát.

Legyen $g : [a, b] \to \mathbb{C}$ adott komplex értékű függvény. Jelölje $u = \mathrm{Re}\, g$, ill. $v = \mathrm{Im}\, g$ a g függvény valós, ill. képzetes részét, azaz

$$g(t) = u(t) + iv(t).$$

Komplex értékű függvény deriváltját és integrálját az alábbiak szerint értelmezzük.

1.1. Definíció. A $g(t) = u(t) + iv(t)$ komplex értékű függvény differenciálható a t pontban, ha az u és v függvények differenciálhatók t-ben, és ekkor

$$g'(t) = u'(t) + iv'(t).$$

1.2. Definíció. A $g(t) = u(t) + iv(t)$ komplex értékű függvény Riemann-integrálható az $[a, b]$ intervallumon, ha az u és v függvények Riemann-integrálhatók $[a, b]$-n, és ekkor

$$\int_a^b g(t)\, dt = \int_a^b u(t)\, dt + i \int_a^b v(t)\, dt.$$

Szükségünk van az alábbi fogalmakra.

1.3. Definíció. Azt mondjuk, hogy a $g : [a, b] \to \mathbb{C}$ függvény *szakaszonként folytonos* $[a, b]$-n, ha legfeljebb véges számú szakadási helye van $[a, b]$-n, és minden szakadási helyén a jobb és bal oldali határértékei léteznek és végesek.

1.4. Megjegyzés. Világos, hogy egy komplex értékű függvény akkor és csak akkor szakaszonként folytonos $[a, b]$-n, ha a valós része és képzetes része által definiált függvények szakaszonként folytonosak $[a, b]$-n.

Valós függvényekre ismert tulajdonságból következik rögtön:

1.5. Tétel. *Ha a $g : [a, b] \to \mathbb{C}$ függvény szakaszonként folytonos, akkor Riemann-integrálható $[a, b]$-n.*

A $h : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ függvénynek létezik az *improprius integrálja* a $[0, \infty)$ intervallumon, ha a következő határérték létezik és véges:

$$\int_0^\infty h(t)\, dt \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{T \to \infty} \int_0^T h(t)\, dt.$$

A Laplace-transzformáció bevezetéséhez és annak tanulmányozásához szükségünk lesz a következő két fogalomra:

1.6. Definíció. Azt mondjuk, hogy az $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{C}$ függvény *szakaszonként folytonos* $[0,\infty)$-n, ha bármely $[0, A]$ véges intervallumon szakaszonként folytonos.

1.7. Definíció. Azt mondjuk, hogy az $f : [0,\infty) \to \mathbb{C}$ függvény *exponenciálisan korlátos* a $[0,\infty)$ intervallumon, ha van olyan $M > 0$ és $\alpha \in \mathbb{R}$, hogy

$$|f(t)| \leq Me^{\alpha t}, \qquad t \geq 0.$$

1.8. Definíció. Azt mondjuk, hogy az $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{C}$ függvény *Laplace-transzformáltja létezik* az $s \in \mathbb{C}$ helyen, ha az

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$$

integrál létezik. Azt az $F \in \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ függényt pedig, amelyet az

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt \tag{1.1}$$

összefüggés definiált olyan $s \in \mathbb{C}$-re, amelyre az integrál létezik, az f függvény *Laplace-transzformáltjának* nevezzük. Az f függvényt szokás az $\mathcal{L}\{f\}$ Laplace-transzformált *generátorfüggvényének* hívni.

Az f függvény Laplace-transzformáltját a szakirodalomban az

$$\mathcal{L}\{f\}(s),\ \mathcal{L}[f](s),\ \mathcal{L}\{f(t)\}(s),\ \mathcal{L}[f(t)](s),\ \mathcal{L}\{f(\cdot)\}(s),\ \mathcal{L}[f(\cdot)](s)$$

vagy az általunk már használt $F(s)$ szimbólumokkal jelölik.

Legyen Λ azoknak a $[0,\infty)$-n értelmezett valós vagy komplex értékű függvényeknek a halmaza, amelyek szakaszonként folytonosak és exponenciálisan korlátosak $[0,\infty)$-en, továbbá folytonosak 0-ban. A következő alapvető tétel szerint minden Λ függvényosztályhoz tartozó függvénynek létezik a Laplace-transzformáltja.

1.9. Tétel (Egzisztencia tétel). *Ha $f \in \Lambda$, ahol f exponenciális korlátja $|f(t)| \leq Me^{s_0 t}$, akkor f Laplace-transzformáltja létezik az $\{s \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Re} s > s_0\}$ komplex félsíkon.*

A legkisebb olyan $s_0 \in \mathbb{R}$ számot, amelyre az f függvény Laplace-transzformáltja létezik az $\{s \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Re} s > s_0\}$ komplex félsíkon, a Laplace-transzformált *konvergencia abszcisszájának* nevezzük.

A Laplace-transzformációt úgy is felfoghatjuk, mint egy leképezést: bármely $f \in \Lambda$ függvényhez hozzárendelhetjük az $\mathcal{L}\{f\} = F \in (\mathbb{C} \to \mathbb{C})$ Laplace-transzformált függvényt, amely értelmezve van minden olyan $s \in \mathbb{C}$-re, amelyre $\operatorname{Re} s$ elegendően nagy. A következő tétel mutatja, hogy ez a leképezés lineáris a következő értelemben:

1.10. Tétel (linearitás). *Ha $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{C}$ és $g\colon [0,\infty) \to \mathbb{C}$ két olyan függvény, amelynek létezik a Laplace-transzformáltja az $s \in \mathbb{C}$ helyen, akkor tetszőleges $a, b \in \mathbb{C}$ konstansok esetén az $af + bg$ függvény Laplace-transzformáltja is létezik az s helyen és*

$$\mathcal{L}\{af + bg\}(s) = a\mathcal{L}\{f\}(s) + b\mathcal{L}\{g\}(s).$$

Bizonyítás: Feltételünk szerint

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt \qquad \text{és} \qquad \mathcal{L}\{g\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} g(t)\,dt$$

egyaránt létezik. Így

$$a\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt + b\int_0^\infty e^{-st} g(t)dt = \int_0^\infty e^{-st}\left(af(t)+bg(t)\right)\,dt,$$

a kívánt összefüggés teljesül. $\square$

1.11. Példa. Számítsuk ki az $f(t) \equiv 1,\ (t \geq 0)$. függvény Laplace-transzformáltját!
Ekkor $f \in \Lambda$, ugyanis $|f(t)| \leq 1e^{0t}$, $t \geq 0$, és így

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = \mathcal{L}\{1\}(s) = \int_0^\infty e^{-st}\cdot 1\,dt = \lim_{A\to+\infty}\int_0^A e^{-st}\,dt = \lim_{A\to+\infty}\frac{1}{-s}\left(e^{-sA}-1\right) = \frac{1}{s},$$

ha $\operatorname{Re} s > 0$. $\square$

1.12. Példa. Számítsuk ki az $f(t) = e^{zt},\ (t \geq 0),\ z \in \mathbb{C}$ függvény Laplace-transzformáltját!
Ekkor $f \in \Lambda$, ugyanis $|f(t)| \leq e^{(\operatorname{Re} z)t}$, $t \geq 0$, és így

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = \mathcal{L}\left\{e^{zt}\right\}(s) = \int_0^\infty e^{-st}e^{zt}\,dt = \int_0^\infty e^{-(s-z)t}\,dt = \frac{1}{s-z},$$

ha $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} z$, azaz $\operatorname{Re}(s-z) > 0$. $\square$

1.13. Példa. Legyen $\beta \in \mathbb{R}$ rögzített, és számítsuk ki a $t \mapsto \cos\beta t$ és $t \mapsto \sin\beta t$ függvények Laplace-transzformáltját!
Az Euler-formula szerint

$$e^{i\beta t} = \cos\beta t + i\sin\beta t \qquad \text{és} \qquad e^{-i\beta t} = \cos\beta t - i\sin\beta t,$$

és ezek segítségével a cos és sin függvények

$$\cos\beta t = \frac{e^{i\beta t}+e^{-i\beta t}}{2} \qquad \text{és} \qquad \sin\beta t = \frac{e^{i\beta t}-e^{-i\beta t}}{2i}$$

alakba írhatók át tetszőleges t-re. Így

$$\mathcal{L}\{\cos\beta t\}(s) = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{2}e^{i\beta t}+\frac{1}{2}e^{-i\beta t}\right\}(s) = \frac{1}{2}\frac{1}{s-i\beta}+\frac{1}{2}\frac{1}{s+i\beta} = \frac{s}{(s-i\beta)(s+i\beta)} = \frac{s}{s^2+\beta^2},$$

ha $\operatorname{Re} s > 0$.
Hasonlóan megmutatható, hogy

$$\mathcal{L}\{\sin\beta t\} = \frac{\beta}{s^2+\beta^2}, \quad \operatorname{Re} s > 0.$$

$\square$

Az alkalmazásokban fontosak a Laplace-transzformált alábbi tulajdonságai.

1.14. Tétel (Csillapítási tétel). *Legyen* $f \in \Lambda$, $F = \mathcal{L}\{f\}$, $z \in \mathbb{C}$. *Ekkor*

$$\mathcal{L}\{e^{-zt}f(t)\}(s) = F(s+z),$$

minden olyan esetben, amikor $\operatorname{Re} s$ *elég nagy.*

Bizonyítás:

$$\mathcal{L}\{e^{-zt}f(t)\}(s) = \int_0^\infty e^{-st}e^{-zt}f(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-(s+z)t}f(t)\,dt = \mathcal{L}\{f\}(s+z).$$

□

1.15. Példa. A csillapítási tételt alkalmazva kapjuk az

$$\mathcal{L}\{e^{\alpha t}\sin\beta t\}(s) = \frac{\beta}{(s-\alpha)^2+\beta^2}, \qquad \mathcal{L}\{e^{\alpha t}\cos\beta t\}(s) = \frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2+\beta^2}$$

azonosságokat. □

A következő tétel egy adott függvény és differenciálhányadosának Laplace-transzformáltja között mutat meg összefüggést.

1.16. Tétel. *Legyen* $f : [0,\infty) \to \mathbb{C}$ *olyan függvény, amely differenciálható, és deriváltjával együtt a* Λ *függvényosztályba tartozik. Ekkor*

$$\mathcal{L}\{f'\}(s) = s\mathcal{L}\{f\}(s) - f(0),$$

minden $s \in \mathbb{C}$ *-re, amely valós része elegendően nagy.*

Bizonyítás: Mivel $f, f' \in \Lambda$ ezért ezeknek a függvényeknek létezik a Laplace-transzformáltjuk minden olyan $s \in \mathbb{C}$-re, amelyre $\operatorname{Re} s$ elegendően nagy. Másrészt $f \in \Lambda$ -ból következik, hogy

$$|f(t)| \le Me^{\alpha t}, \qquad t \ge 0,$$

valamely $M > 0$ és $\alpha \in \mathbb{R}$ állandókkal, és így

$$|e^{-sA}f(A)| \le Me^{-(\operatorname{Re} s-\alpha)A} \to 0, \quad \text{ha} \ \ A \to +\infty \quad \text{és} \quad \operatorname{Re} s > \alpha.$$

Legyen $s \in \mathbb{C}$ tetszőlegesen rögzített úgy, hogy $\operatorname{Re} s > \alpha$ és

$$\int_0^\infty e^{-st}f'(t)\,dt$$

létezik. Tetszőleges $A > 0$ esetén a parciális integrálás szabálya szerint

$$\int_0^A e^{-st}f'(t)\,dt = e^{-sA}f(A) - f(0) + \int_0^A se^{-st}f(t)\,dt,$$

amiből a $A \to +\infty$ határátmenettel kapjuk a

$$\int_0^\infty e^{-st}f'(t)\,dt = -f(0) + s\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt$$

összefüggést. Ezzel a tételt bizonyítottuk. □

Az 1.16. Tétel következményeként könnyen beláthatók a következő állítások.

1.17. Következmény. *Ha* $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{C}$*, és* $f, f', f'', \dots, f^{(n)} \in \Lambda$*, akkor*

$$\mathcal{L}\{f''\}(s) = s^2\mathcal{L}\{f\}(s) - sf(0) - f'(0), \qquad \text{ha } \operatorname{Re} s \text{ elég nagy,}$$

illetve tetszőleges pozitív egész n*-re*

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}\}(s) = s^n\mathcal{L}\{f\}(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0), \qquad \text{ha } \operatorname{Re} s \text{ elég nagy.}$$

Bizonyítás: Az előző tétel alapján

$$\mathcal{L}\left\{f'\right\}(s) = s\mathcal{L}\left\{f\right\}(s) - f(0).$$

Másrészt

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{f''\right\}(s) &= \mathcal{L}\left\{(f')'\right\}(s) = s\mathcal{L}\left\{f'\right\}(s) - f'(0) \\ &= s(s\mathcal{L}\left\{f\right\}(s) - f(0)) - f'(0) = s^2\mathcal{L}\left\{f\right\}(s) - sf(0) - f'(0).\end{aligned}$$

A második állítás teljes indukcióval igazolható. □

Eddig mindig arról az esetről beszéltünk, amikor egy időtartományban ismert (azon kívül 0-nak definiált) függvény Laplace-transzformáltját kerestük. Az alkalmazásokban azonban sokszor van szükségünk a fordított feladat megoldására:

Adott egy $F \in \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ komplex függvény, amely minden olyan $s \in \mathbb{C}$ -re definiálva van amelyre $\operatorname{Re} s$ elegendően nagy. Keresünk egy olyan $f : [0,\infty) \to \mathbb{C}$ függvényt, amelyre $\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s)$ teljesül minden olyan s-re, amelyre $\operatorname{Re} s$ elegendően nagy. Ha találunk egy ilyen f függvényt, akkor azt az F függvény *inverz Laplace-transzformáltjának* nevezzük, és $\mathcal{L}^{-1}\{F\}$-fel jelöljük. Kérdés persze, hogy az inverz Laplace-transzformáció egyértelműen definiált-e, azaz lehet-e az f-től különböző g függvényt találni úgy, hogy

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = \mathcal{L}\{g\}(s) = F(s)$$

teljesüljön minden olyan s-re, amely valós része elegendően nagy. Ha például f és g definíciója csak véges sok pontban különbözik, akkor a Riemann-integráljuk azonos lesz, és ezért $\mathcal{L}\{f\} = \mathcal{L}\{g\}$, azaz ekkor az inverz művelet nem egyértelműen definiált. A következő tétel értelmében (amelyet nem bizonyítunk) ha az $\mathcal{L}\{f\} = F$ egyenletnek adott F-re van folytonos f megoldása, akkor az egyértelmű. Ekkor az $\mathcal{L}^{-1}\{F\}$ jelölésen ennek az egyenletnek a folytonos megoldását értjük.

1.18. Tétel (Unicitás tétel). *Ha* $f : [0,\infty) \to \mathbb{C}$ *és* $g : [0,\infty) \to \mathbb{C}$ *két olyan folytonos függvény amelyek elemei a* Λ *függvényosztálynak, és Laplace-transzformáltjaikra teljesül*

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = \mathcal{L}\{g\}(s)$$

minden $s \in \mathbb{C}$*-re, amelyre* $\operatorname{Re} s$ *elegendően nagy, akkor*

$$f(t) = g(t), \qquad t \geq 0.$$

A Laplace-transzformált linearitásából rögtön következik:

1.19. Tétel. *Az inverz Laplace-transzformáció lineáris, azaz ha* $F = \mathcal{L}\{f\}$*,* $G = \mathcal{L}\{g\}$*,* $a, b \in \mathbb{C}$*, akkor*

$$\mathcal{L}^{-1}\{aF + bG\} = a\mathcal{L}^{-1}\{F\} + b\mathcal{L}^{-1}\{G\}.$$

Bizonyítás:

$$\mathcal{L}\{a\mathcal{L}^{-1}\{F\} + b\mathcal{L}^{-1}\{G\}\} = \mathcal{L}\{af + bg\} = a\mathcal{L}\{f\} + b\mathcal{L}\{g\} = aF + bG.$$

□

1.20. Példa. Számítsuk ki az

$$F(s) = \frac{19 - 2s}{s^2 + s - 6}$$

függvény inverz Laplace-transzformáltját!

A nevező szorzattá alakítható, ezért keressük meg először $F(s)$ parciális törtekre bontott alakját:

$$\frac{19 - 2s}{s^2 + s - 6} = \frac{19 - 2s}{(s-2)(s+3)} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s+3}.$$

Ebből

$$19 - 2s = A(s+3) + B(s-2)$$

adódik, ahova az $s = 2$-t behelyettesíve kapjuk, hogy $15 = 5A$, azaz $A = 3$, illetve az $s = -3$-t behelyettesíve kapjuk, hogy $25 = -5B$, azaz $B = -5$. Így

$$F(s) = \frac{19 - 2s}{s^2 + s - 6} = \frac{3}{s-2} - \frac{5}{s+3},$$

ezért az inverz Laplace-transzformált linearitását alkalmazva

$$\mathcal{L}^{-1}\{F\}(t) = 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\}(t) - 5\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\}(t) = 3e^{2t} - 5e^{-3t}.$$

□

1.21. Példa. Számítsuk ki az

$$F(s) = \frac{3s - 1}{s^2 + 4s + 13}$$

függvény inverz Laplace-transzformáltját!

A tört nevezője most nem alakítható szorzattá, így teljes négyzetté alakítással kezdjük:

$$F(s) = \frac{3s-1}{s^2+4s+13} = \frac{3s-1}{(s+2)^2+9} = \frac{3(s+2)-7}{(s+2)^2+9} = 3\frac{s+2}{(s+2)^2+9} - \frac{7}{3}\frac{3}{(s+2)^2+9}$$

ezért az inverz Laplace-transzformált linearitását, a csillapítási tételt és a cos és sin függvényekre vonatkozó azonosságokat alkalmazva

$$\mathcal{L}^{-1}\{F\}(t) = 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+2}{(s+2)^2+3^2}\right\}(t) - \frac{7}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{(s+2)^2+3^2}\right\}(t) = 3e^{-2t}\cos 3t - \frac{7}{3}e^{-2t}\sin 3t.$$

□

A Laplace-tanszformált fontos alkalmazását teszi lehetővé a következő tétel, amelyet itt nem bizonyítunk.

1.22. Tétel. *Legyen* $x\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ *olyan függvény, amely a* $[0,\infty)$*-en* n*-szer differenciálható* ($n \in \mathbb{N}$)*, és eleget tesz az*

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_0 x(t) = g(t), \quad t \geq 0, \tag{1.2}$$

differenciálegyenletnek, ahol $a_0, ..., a_{n-1}$ *adott konstansok és a* $g: [0,\infty) \to \mathbb{R}$ *függvény a* Λ *függvényosztály eleme. Továbbá* x *kielégíti az*

$$x(0) = u_0, \ x'(0) = u_1, \ldots, \ x^{(n-1)}(0) = u_{n-1} \tag{1.3}$$

kezdeti feltételeket adott $u_0, \ldots, u_{n-1} \in \mathbb{R}$ *értékekkel. Ekkor az* x *függvény folytonos és exponenciálisan korlátos a* $[0,\infty)$*-en, és így eleme* Λ*-nak, továbbá* $x', x'', \ldots, x^{(n)} \in \Lambda$ *is teljesül.*

Az (1.2)-(1.3) alakú, ú.n. kezdeti érték feladatok megoldhatók Laplace-transzformált segítségével. A módszert a következő példán mutatjuk be.

1.23. Példa. Tekinstük az

$$x'' - 4x = 0, \qquad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0$$

kezdeti érték feladatot.

Vegyük az egyenlet mindkét oldalának Laplace-transzformáltját:

$$\mathcal{L}\{x''\} - 4\mathcal{L}\{x\} = 0.$$

Használva az $X(s) = \mathcal{L}\{x\}(s)$ jelölést valamint a második derivált Laplace-transzformáltjára vonatkozó azonosságot, kapjuk

$$s^2 X(s) - sx(0) - x'(0) - 4X(s) = 0.$$

A kezdeti értékeket használva

$$(s^2 - 4)X(s) = s,$$

azaz

$$X(s) = \frac{s}{s^2 - 4}.$$

Bontsuk parciális törtekre X-et:

$$\frac{s}{s^2 - 4} = \frac{s}{(s+2)(s-2)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s-2},$$

amiből átszorozva kapjuk, hogy

$$s = A(s-2) + B(s+2).$$

Itt az $s = -2$ helyettesítéssel rögtön kapjuk, hogy $-2 = -4A$, azaz $A = \frac{1}{2}$, és az $s = 2$ helyettesítést használva pedig $2 = 4B$, azaz $B = \frac{1}{2}$. Ezért

$$\frac{s}{s^2 - 4} = \frac{1}{2}\frac{1}{s+2} + \frac{1}{2}\frac{1}{s-2}.$$

Inverz Laplace-transzformáltat számolva megkapjuk a kezdeti érték feladat megoldását

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 - 4}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2}\frac{1}{s+2} + \frac{1}{2}\frac{1}{s-2}\right\} = \frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{2t}.$$

□

1.2. A Laplace-transzformált további tulajdonságai

Az alábbi eredmény azt mondja, hogy a Laplace-transzformát s-szerinti deriváltját kiszámíthatjuk úgy, hogy a deriválás és az impropius integrálás sorrendjét felcseréljük: azaz először s-szerint deriváljuk az $e^{-st}f(t)$ kifejezést, majd a kapott eredménynek vesszük az impropius integrálját. Megjegyezzük, hogy ennek a formális számolásnak az igazolása nem könnyű, a bizonyítást itt nem részletezzük.

1.24. Tétel. *Ha az $f:\ [0,\infty)\to\mathbb{C}$ függvény a Λ osztályba tartozik, akkor van olyan $s_0\in\mathbb{R}$, hogy az*

$$F(s)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt, \qquad s\in(s_0,\infty)$$

függvény az s változója szerint akárhányszor differenciálható (s_0,∞)-en, és tetszőleges k pozitív egész számra

$$F^{(k)}(s)=(-1)^k\int_0^\infty e^{-st}t^kf(t)\,dt, \qquad s\in(s_0,\infty).$$

1.25. Következmény. *Legyen $f\in\Lambda$, s_0 a konvergencia abszcisszája az $F=\mathcal{L}\{f\}$ Laplace-transzformáltnak. Ekkor*

$$F^{(k)}(s)=(-1)^k\mathcal{L}\{t^kf(t)\}(s), \qquad \operatorname{Re}s>s_0.$$

Az előző eredmény alkalmazásaként kapjuk a következő fontos összefüggést:

1.26. Tétel. *Tetszőleges k nemnegatív egészre*

$$\mathcal{L}\left\{t^k\right\}(s)=\frac{k!}{s^{k+1}}, \qquad \operatorname{Re}s>0. \tag{1.4}$$

Bizonyítás: Az (1.4) összefüggés $k=0$ -ra igaz, ugyanis korábban megmutattuk, hogy

$$\mathcal{L}\{1\}(s)=\frac{1}{s}, \qquad \operatorname{Re}s>0,$$

Legyen $F=\mathcal{L}\{1\}$, és alkalmazzuk az 1.25. Követketményt, amelynek értelmében

$$(-1)^k\mathcal{L}\{t^k\}(s)=F^k(s)=\frac{d^k}{ds^k}\left(\frac{1}{s}\right)=(-1)^k\,\frac{k!}{s^{k+1}}, \qquad \operatorname{Re}s>0.$$

amiből következik (1.4). □

Bizonyítás nélkül tekintsük a Laplace-transzformált néhány egyéb tulajdonságát.

1.27. Tétel (Hasonlósági tétel). *Legyen $f\in\Lambda$, $\alpha\neq0$. Ekkor*

$$\mathcal{L}\{f(\alpha t)\}(s)=\frac{1}{\alpha}\mathcal{L}\{f\}\left(\frac{s}{\alpha}\right),$$

minden $s\in\mathbb{C}$-re, amelyre $\operatorname{Re}s$ elegendően nagy.

1.28. Tétel. *Legyen* $f \in \Lambda$. *Ekkor*

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)\,du\right\}(s) = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{f\}(s),$$

minden $s \in \mathbb{C}$*-re, amelyre* $\operatorname{Re} s$ *elegendően nagy.*

1.29. Tétel. *Legyen az* $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ *függvény szakaszonként folytonos és* p*-periodikus. Ekkor*

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = \frac{1}{1-e^{-ps}}\int_0^p e^{-st} f(t)\,dt.$$

minden $s \in \mathbb{C}$*-re, amelyre* $\operatorname{Re} s > 0$.

1.30. Tétel (Kezdeti- és végérték tétel). *Legyen* $f, f' \in \Lambda$.

(a) Legyen $s \in \mathbb{R}$. *Ekkor*

$$\lim_{s\to\infty} s\mathcal{L}\{f\}(s) = f(0).$$

(b) Tegyük fel, hogy $\mathcal{L}\{f\}(s)$ *értelmezve van* $\operatorname{Re} s > 0$*-ra. Ekkor*

$$\lim_{s\to 0} s\mathcal{L}\{f\}(s) = \lim_{t\to\infty} f(t),$$

feltéve, hogy a határértékek léteznek.

1.3. Az egységugrás függvény és a négyszögjel Laplace-transzformáltja

Az alkalmazásokban fontos szerepet játszik az úgynevezett *Heaviside-függvény* vagy *egységugrás függvény*, amelyet $c \in [0,\infty)$-re a

$$H_c(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < c, \\ 1, & c \le t \end{cases}$$

képlettel definiálunk. Világos, hogy a H_c függvény szakaszonként folytonos és exponenciálisan korlátos $[0,\infty)$-en. Így $\mathcal{L}\{H_c\}(s)$ létezik ha $\operatorname{Re} s > 0$ és $c \ge 0$, továbbá

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{H_c\}(s) &= \int_0^\infty e^{-st} H_c(t)\,dt = \int_0^c e^{-st}\cdot 0\,dt + \int_c^\infty e^{-st}\cdot 1\,dt \\
&= \lim_{A\to+\infty}\int_c^A e^{-st}dt = \lim_{A\to+\infty}\frac{1}{-s}\left(e^{-sA} - e^{-sc}\right) = \frac{1}{-s}\left(-e^{-sc}\right), \qquad \operatorname{Re} s > 0.
\end{aligned}$$

Tehát kapjuk a következő állítást.

1.31. Tétel. *Legyen* $c \ge 0$. *Ekkor*

$$\mathcal{L}\{H_c\}(s) = \frac{e^{-sc}}{s}, \qquad \operatorname{Re} s > 0.$$

Megjegyezzük, hogy ha H_c definíciójában a $t = c$ pontban másképp definiáljuk a függvény értékét, pl. úgy, hogy balról folytonos legyen, a Laplace-transzformáltjának az értéke nem változik.

Adott egy $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{C}$ függvény és $c > 0$ konstans, akkor definiáljuk a

$$g_c(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0, & 0 \le t < c, \\ f(t-c), & t \ge c \end{cases}$$

függvényt. Ez nem más, mint az f függvény eltoltja jobbra c egységgel, úgy, hogy negatív t-re konstans 0-val terjesztjük ki az f függvény definícióját. A Heaviside függvény segítségével a g_c függvény a

$$g_c(t) = H_c(t)f(t-c), \qquad t \ge 0$$

alakban is felírható, feltéve, hogy f értelmezését (tetszőleges módon) kiterjesztjük a $[-c, 0]$ intervallumra is.

1.32. Tétel (Eltolási tétel). *Ha $f \in \Lambda$, $c \ge 0$, akkor*

$$\mathcal{L}\{H_c(t)f(t-c)\}(s) = e^{-sc}\mathcal{L}\{f\}(s), \qquad \text{ha } \operatorname{Re} s \text{ elegendően nagy.}$$

Bizonyítás: Az világos, hogy $g_c \in \Lambda$, így $\mathcal{L}\{g_c\}$ létezik, és

$$\int_0^\infty e^{-st}g_c(t)\,dt = \int_c^\infty e^{-st}f(t-c)\,dt = \int_0^\infty e^{-s(u+c)}f(u)\,du = e^{-sc}\int_0^\infty e^{-su}f(u)\,du,$$

ha $\operatorname{Re} s$ elegendően nagy. □

Legyen $a, b \ge 0$. Az *egységnyi négyszögjel* alatt olyan függvényt értünk, amely egy adott $[a, b]$ intervallumon kívül nulla és az intervallumon az értéke 1. Képletben kifejezve:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < a \\ 1, & a \le t < b \\ 0, & b \le t \end{cases}$$

Itt jobbról folytonos függvényként definiáltuk az egységnyi négyszögjel függvényt, de bárhogy is definiáljuk a szakadási pontokban a függvény értékét, ugyanaz lesz a Laplace-transzformáltja. Világos, hogy $f(t) = H_a(t) - H_b(t)$, így

$$\mathcal{L}\{f\} = \mathcal{L}\{H_a\} - \mathcal{L}\{H_b\} = \frac{1}{s}e^{-sa} - \frac{1}{s}e^{-sb} = \frac{e^{-sa} - e^{-sb}}{s}.$$

1.33. Példa. Tekintsük az

$$x'' - 4x = f(t), \qquad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0$$

kezdeti érték feladatot, ahol

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 1, \\ 2, & 1 \le t < 3, \\ 0, & 3 \le t. \end{cases}$$

Számítsuk ki először az f függvény Laplace-transzformáltját. Mivel $f(t) = 2(H_1(t) - H_3(t))$, ezért

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = 2\mathcal{L}\{H_1(t)\} - 2\mathcal{L}\{H_3(t)\} = 2\frac{e^{-s}}{s} - 2\frac{e^{-3s}}{s}.$$

Így az egyenlet mindkét oldalának Laplace-transzformáltját véve

$$s^2X(s) - sx(0) - x'(0) - 4X(s) = e^{-s}\frac{2}{s} - e^{-4s}\frac{2}{s},$$

azaz

$$(s^2-4)X(s) = e^{-s}\frac{2}{s} - e^{-4s}\frac{2}{s},$$

és így

$$X(s) = e^{-s}\frac{2}{s(s+2)(s-2)} - e^{-4s}\frac{2}{s(s+2)(s-2)}.$$

Először számítsuk ki a tört parciális törtekre bontását:

$$\frac{2}{s(s+2)(s-2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s-2},$$

amiből

$$2 = A(s+2)(s-2) + Bs(s-2) + Cs(s+2).$$

Az $s = 0$ helyettesítésből $2 = -4A$, azaz $A = -\frac{1}{2}$. Az $s = -2$ helyettesítésből $2 = 8B$, azaz $B = \frac{1}{4}$. Az $s = 2$ helyettesítéssel pedig $2 = 8C$, azaz $C = \frac{1}{4}$ adódik. Ezért az inverz Laplace-transzformált:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s(s+2)(s-2)}\right\}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{1}{2}\frac{1}{s} + \frac{1}{4}\frac{1}{s+2} + \frac{1}{4}\frac{1}{s-2}\right\}(t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{-2t} + \frac{1}{4}e^{2t}.$$

Az eltolási tétel szerint ezért a megoldás

$$\begin{aligned} x(t) &= H_1(t)\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{-2(t-1)} + \frac{1}{4}e^{2(t-1)}\right) - H_3(t)\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{-2(t-3)} + \frac{1}{4}e^{2(t-3)}\right) \\ &= \begin{cases} 0, & t < 1, \\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{-2(t-1)} + \frac{1}{4}e^{2(t-1)}, & 1 \le t < 3, \\ \frac{1}{4}e^{-2(t-1)} + \frac{1}{4}e^{2(t-1)} - \frac{1}{4}e^{-2(t-3)} - \frac{1}{4}e^{2(t-3)}, & t \ge 3. \end{cases} \end{aligned}$$

□

Az eltolási tétel segítségével tetszőleges szakaszonként folytonos függvény Laplace-transzformáltját ki tudjuk számítani.

1.34. Példa. Számítsuk ki az

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 1, \\ 2t-3, & 1 \le t < 4, \\ 0, & 4 \le t. \end{cases}$$

függvény Laplace-transzformáltját!

Ehhez először fejezzük ki f-et Heaviside-függvényt használva:

$$f(t) = (H_1(t) - H_4(t))(2t-3).$$

Az eltolási tétel használatához alakítsuk át a függvény képletét a megfelelő módon:

$$f(t) = H_1(t)(2t-3) - H_4(t)(2t-3) = H_1(t)\Big(2(t-1)-1\Big) - H_4(t)\Big(2(t-4)+5\Big).$$

Ekkor az eltolási tétel szerint

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f\}(s) &= \mathcal{L}\Big\{H_1(t)\Big(2(t-1)-1\Big)\Big\} - \mathcal{L}\Big\{H_4(t)\Big(2(t-4)+5\Big)\Big\} \\ &= e^{-s}\left(2\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s}\right) - e^{-4s}\left(2\frac{1}{s^2}+5\frac{1}{s}\right).\end{aligned}$$

□

1.35. Példa. Tekintsük az

$$x'' - 2x' - 3x = f(t), \qquad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0$$

kezdeti érték feladatot, ahol

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 1, \\ 2t-3, & 1 \le t < 4, \\ 0, & 4 \le t. \end{cases}$$

Megjegyezzük, hogy az előző példában már kiszámítottuk f Laplace-transzformáltját. Az egyenlet mindkét oldalának Laplace-transzformáltját véve

$$s^2X(s) - sx(0) - x'(0) - 2sX(s) + 2x(0) - 3X(s) = e^{-s}\left(\frac{2}{s^2}-\frac{1}{s}\right) - e^{-4s}\left(\frac{2}{s^2}+\frac{5}{s}\right),$$

azaz

$$(s^2-2s-3)X(s) = s - 2 + e^{-s}\frac{2-s}{s^2} - e^{-4s}\frac{5s+2}{s^2},$$

és így

$$X(s) = \frac{s-2}{(s+1)(s-3)} + e^{-s}\frac{2-s}{s^2(s+1)(s-3)} - e^{-4s}\frac{5s+2}{s^2(s+1)(s-3)}.$$

Már csak inverz Laplace-transzformáltat kell számolni! Jelölje $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ külön-külön a tagok inverze Laplace-transzformáltjait. Számítsuk ki először az első tört parciális törtekre bontását:

$$\frac{s-2}{(s+1)(s-3)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-3},$$

és így

$$s - 2 = A(s-3) + B(s+1).$$

Ebből az $s = -1$ helyettesítéssel kapjuk, hogy $-3 = -4A$, azaz $A = \frac{3}{4}$. Hasonlóan, az $s = 3$ helyettesítésből kapjuk, hogy $1 = 4B$, azaz $B = \frac{1}{4}$. Ezért

$$x_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-2}{(s+1)(s-3)}\right\}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{4}\frac{1}{s+1} + \frac{1}{4}\frac{1}{s-3}\right\}(t) = \frac{3}{4}e^{-t} + \frac{1}{4}e^{3t}.$$

A második taghoz először tekintsük:

$$\frac{2-s}{s^2(s+1)(s-3)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+1} + \frac{D}{s-3},$$

azaz

$$2 - s = As(s+1)(s-3) + B(s+1)(s-3) + Cs^2(s-3) + Ds^2(s+1).$$

Ebből az $s = 0$ helyettesítéssel kapjuk, hogy $2 = -3B$, azaz $B = -\frac{2}{3}$. Az $s = 3$ helyettesítésből kapjuk, hogy $-1 = 36D$, azaz $D = -\frac{1}{36}$. Az $s = -1$ helyettesítéssel $3 = -4C$, azaz $C = -\frac{3}{4}$.

Végül az $s = 1$ helyettesítést használva, $1 = -4A - 4B - 2C + 2D$, amiből a már kiszámított együtthatókat behelyettesítve kapjuk, hogy $1 = -4A + \frac{8}{3} + \frac{6}{4} - \frac{1}{18}$, azaz $A = \frac{7}{9}$. Ezért

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2-s}{s^2(s+1)(s-3)}\right\}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{7}{9}\frac{1}{s} - \frac{2}{3}\frac{1}{s^2} - \frac{3}{4}\frac{1}{s+1} - \frac{1}{36}\frac{1}{s-3}\right\}(t) = \frac{7}{9} - \frac{2}{3}t - \frac{3}{4}e^{-t} - \frac{1}{36}e^{3t}.$$

Az eltolási tétel szerint

$$x_2(t) = H_1(t)\left(\frac{7}{9} - \frac{2}{3}(t-1) - \frac{3}{4}e^{-(t-1)} - \frac{1}{36}e^{3(t-1)}\right).$$

Hasonlóan,

$$\frac{5s+2}{s^2(s+1)(s-3)} \quad \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+1} + \frac{D}{s-3},$$

azaz

$$5s + 2 = As(s+1)(s-3) + B(s+1)(s-3) + Cs^2(s-3) + Ds^2(s+1).$$

Az $s = 0$ helyettesítéssel kapjuk, hogy $2 = -3B$, azaz $B = -\frac{2}{3}$. Az $s = 3$ helyettesítésből kapjuk, hogy $17 = 36D$, azaz $D = \frac{17}{36}$. Az $s = -1$ helyettesítéssel $-3 = -4C$, azaz $C = \frac{3}{4}$. Végül az $s = 1$ helyettesítést használva, $7 = -4A - 4B - 2C + 2D$, és így $7 = -4A + \frac{8}{3} - \frac{6}{4} + \frac{17}{18}$, azaz $A = -\frac{11}{9}$. Ezért

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5s+2}{s^2(s+1)(s-3)}\right\}(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{11}{9}\frac{1}{s} - \frac{2}{3}\frac{1}{s^2} + \frac{3}{4}\frac{1}{s+1} + \frac{17}{36}\frac{1}{s-3}\right\}(t) \\
&= -\frac{11}{9} - \frac{2}{3}t + \frac{3}{4}e^{-t} + \frac{17}{36}e^{3t}.
\end{aligned}$$

ezért az eltolási tétel szerint

$$x_3(t) = H_4(t)\left(-\frac{11}{9} - \frac{2}{3}(t-4) + \frac{3}{4}e^{-(t-4)} + \frac{17}{36}e^{3(t-4)}\right).$$

A feladat megoldása ezután $x(t) = x_1(t) + x_2(t) - x_3(t)$. □

1.4. A Dirac-delta függvény és Laplace-transzformáltja

Számos alkalmazásban fellépnek impulzív jelenségek, például pillanatnyi erőhatás egy mechanikai modellben, vagy pillanatnyi feszültségváltozás egy elektromos áramkörben. Ilyen impulzív hatás modellezésére gyakran használják az ú.n. *Dirac-delta függvényt* vagy más néven a *Dirac-impulzus függvényt*, amelynek szokásos jele $\delta(t)$.

Tegyük fel például, hogy egy mechanikai modellben egy kis ideig konstans erő hat, amelynek az impulzusa, azaz az integrálja az adott időintervallumon egységnyi nagyságú. Tegyük fel, hogy ez az időintervallum az origóra nézve szimmetrikus, legyen ez $[-h, h]$ $(h > 0)$, azaz az erő képlete

$$\delta_h(t) = \begin{cases} \frac{1}{2h}, & -h \le t \le h, \\ 0, & |t| > h, \end{cases}$$

és így a teljes impulzusa

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_h(t)\, dt = \int_{-h}^{h} \delta_h(t)\, dt = 1.$$

Ahogy h csökken, az egységnyi impulzussal rendelkező erőhatás egyre inkább a 0 kis környezetére korlátozódik, de egyre nagyobb lesz. Nyilván teljesül, hogy

$$\lim_{h\to 0+}\int_{-\infty}^{\infty}\delta_h(t)\,dt=\lim_{h\to 0+}\int_{-h}^{h}\delta_h(t)\,dt=1.$$

Természetes az idealizált impulzív erőhatást δ_h határértékeként definiálni, hogy ha $h\to 0+$, azaz legyen δ a δ_h függvény pontonkénti határértéke, ha $h\to 0+$. Ekkor

$$\delta(t)=\begin{cases}\infty, & t=0,\\ 0, & t\neq 0.\end{cases}\tag{1.5}$$

Másrészt elvárjuk azt is, hogy a Dirac-delta függvénynek is egységnyi impulzusa legyen az egész számegyenesen, azaz az

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\,dt=1\tag{1.6}$$

azonosság teljesüljön. Természetesen valós függvény nem veheti fel a ∞ értéket, és ha egy pont kivételével azonosan nulla, akkor integrálja is 0 kell legyen, azaz egy „hagyományos” függvény nem teljesítheti az (1.5) és (1.6) azonosságokat.

Ha (1.6) teljesül, akkor ez azt jelenti, hogy

$$\lim_{h\to 0+}\int_{-\infty}^{\infty}\delta_h(t)\,dt=\int_{-\infty}^{\infty}\lim_{h\to 0+}\delta_h(t)\,dt$$

is teljesülne, ami tudjuk, hogy pontonkénti konvergencia esetében általában nem teljesül. A Dirac-delta függvénytől viszont azt is megköveteljük, hogy

$$\lim_{h\to 0+}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\delta_h(t)\,dt=\int_{-\infty}^{\infty}\lim_{h\to 0+}f(t)\delta_h(t)\,dt$$

teljesüljön minden f folytonos függvényre is. Ekkor az integrálokra vonatkozó középérték tétel szerint minden h-ra létezik olyan $\xi_h\in[-h,h]$, hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\delta(t)\,dt=\lim_{h\to 0+}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\delta_h(t)\,dt=\lim_{h\to 0+}\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}f(t)\,dt=\lim_{h\to 0+}f(\xi_h).$$

De $\xi_h\to 0$, így f folytonossága miatt

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\delta(t)\,dt=f(0).\tag{1.7}$$

A Dirac-delta függvényen tehát egy olyan δ „függvényt” értünk, amely rendelkezik az (1.5), (1.6) és (1.7) tulajdonságokkal. Megmutatható mélyebb matematikai eszközöket használva, hogy van olyan, ú.n. általánosított függvény vagy más szóval disztribúció, amely rendelkezik ezekkel a tulajdonságokkal. Ennek precíz tárgyalása azonban messze meghaladja ennek a jegyzetnek a kereteit.

Az alkalmazásokban általában a Dirac-delta függvény eltoltjai szerepelnek. Legyen $c>0$, és tekintsük a $\delta(t-c)$ függvényt. Ez a c pontra koncentrálódó Dirac-impulzus függvény, amelyre teljesül, hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\delta(t-c)\,dt=f(c)\tag{1.8}$$

minden f folytonos függvény esetén. Ennek Laplace-transzformáltja is rögtön megkapható az (1.8) formulát alkalmazva:

$$\mathcal{L}\{\delta(t-c)\}(s)=\int_{0}^{\infty}e^{-st}\delta(t-c)\,dt=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-st}\delta(t-c)\,dt=e^{-sc}.$$

1.36. Példa. Tekintsük az

$$x'' + 2x' + 4x = \delta(t-1), \qquad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0$$

kezdeti érték feladatot.

Laplace-transzformálva az egyenletet kapjuk, hogy

$$s^2X(s) - sx(0) - x'(0) + 2sX(s) - 2x(0) + 4X(s) = e^{-s},$$

azaz a kezdeti feltételeket használva

$$(s^2 + 2s + 4)X(s) = e^{-s},$$

és így

$$X(s) = e^{-s}\frac{1}{(s+2)^2}.$$

Számítsuk ki először a csillapítási tételt használva

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2}\right\}(t) = te^{-2t}.$$

Ezért az eltolási tétel szerint

$$x(t) = H_1(t)(t-1)e^{-2(t-1)} = \begin{cases} 0, & 0 \le t < 1, \\ (t-1)e^{-2(t-1)}, & 1 \le t. \end{cases}$$

□

1.5. Konvolúciós integrál és annak Laplace-transzformáltja

Lineáris differenciálegyenletek megoldásakor gyakran kell $\int_0^t f(t-u)g(u)\,du$ alakú integrálokat kiszámítanunk, ezért ezek rövidítésére vezessük be a következő jelölést.

1.37. Definíció. Az $f, g : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ függvények *konvolúciójának* (vagy *konvolúciós szorzatának*) nevezzük az

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-u)g(u)\,du, \quad t \ge 0$$

integrált.

A konvolúció definíciójából könnyen igazolhatók az alábbi tulajdonságok:

1.38. Állítás. *Legyen $f, g, h : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ függvények lokálisan integrálhatók. A definíció alapján az f és g konvolúciója értelmezve van $[0, \infty)$-en, és a következők teljesülnek:*

(i) a konvolúció kommutatív, azaz $f * g = g * f$, $\forall f, g$-re,

(ii) a konvolúció asszociatív, azaz $(f * g) * h = f * (g * h)$, $\forall f, g, h$-ra,

(iii) a konvolúció disztributív az összeadásra nézve, azaz $(f + g) * h = f * h + g * h$, $\forall f, g, h$-ra,

(iv) $f * O = O$, $\forall f$-re, ahol $O(t) \equiv 0$ az azonosan 0 függvény.

Megmutatható, hogy ha $f, g \in \Lambda$, akkor $f * g \in \Lambda$, és teljesül az alábbi alapvető állítás.

1.39. Tétel (Konvolúciós tétel). *Tetszőleges $f, g \in \Lambda$ függvényekre*

$$\mathcal{L}\{f * g\}(s) = \mathcal{L}\{f\}(s) \cdot \mathcal{L}\{g\}(s), \qquad \textit{ha } \operatorname{Re} s \textit{ elegendően nagy.}$$

A tétel szerint szorzat inverz Laplace-transzformálját az egyes tényezők inverz Laplace-transzformáltjainak konvolúciója adja. Ennek alkalmazásaira a következő szakaszban láthatunk példákat.

1.6. Alkalmazások

1.40. Példa. Adott $b, \omega \in \mathbb{R}$. Keressük azt az $x : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvényt, amelyre a következő teljesül:

$$x''(t) + x(t) = b \sin \omega t, \qquad t \geq 0,$$

és

$$x(0) = 1, \qquad x'(0) = 0.$$

Az 1.22. Tétel alapján $x, x', x'' \in \Lambda$, ezért az egyenlet két oldalának Laplace-transzformáltját véve (elegendő nagy $\operatorname{Re} s$-re), és a Laplace-transzformált tulajdonságait alkalmazva kapjuk

$$\mathcal{L}\{x''\}(s) + \mathcal{L}\{x\}(s) = \mathcal{L}\{b \sin \omega t\}(s),$$

így

$$s^2 X(s) - sx(0) - x'(0) + X(s) = b \frac{\omega}{s^2 + \omega^2},$$

ahol megint $X(s) = \mathcal{L}\{x\}(s)$. Használva az $x(0) = 1$ és $x'(0) = 0$ megadott értékeket kapjuk, hogy

$$X(s) = b \frac{1}{s^2 + 1} \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} + \frac{s}{s^2 + 1},$$

és így az 1.39. Tétel szerint

$$x(t) = b \int_0^t \sin(t - u) \sin \omega u \, du + \cos t, \qquad t \geq 0.$$

Tegyük fel először, hogy $\omega \neq \pm 1$. Ekkor az integrált a

$$\sin(t - u) \sin \omega u = \frac{1}{2} \Big(\cos(t - u - \omega u) - \cos(t - u + \omega u) \Big)$$

azonosságot felhasználva számítjuk ki a következőképpen:

$$\begin{aligned}
x(t) &= \frac{b}{2} \int_0^t \Big(\cos(t - (1 + \omega)u) - \cos(t - (1 - \omega)u) \Big) du + \cos t \\
&= \frac{b}{2} \left(\left[\frac{\sin(t - (1 + \omega)u)}{-1 - \omega} \right]_{u=0}^{u=t} + \left[\frac{\sin(t - (1 - \omega)u)}{-1 + \omega} \right]_{u=0}^{u=t} \right) + \cos t \\
&= \frac{b}{2} \left(\frac{\sin \omega t + \sin t}{1 + \omega} + \frac{\sin \omega t - \sin t}{-1 + \omega} \right) + \cos t \\
&= \frac{b}{1 - \omega^2} (\sin t - \omega \sin \omega t) + \cos t, \qquad t \geq 0, \quad \omega \neq \pm 1.
\end{aligned}$$

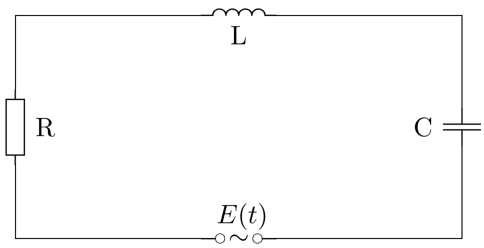
Ha $\omega = 1$, akkor

$$x(t) = \frac{b}{2}\int_0^t \Big(\cos(t-2u) - \cos t\Big)du + \cos t = \frac{b}{2}(\sin t + t\cos t) + \cos t, \qquad t \geq 0.$$

Ha $\omega = -1$, akkor $b\sin(-t) = -b\sin t$, így ez visszavezethető az előző esetre. □

1.41. Példa. Soros RLC áramkör

Ha egy váltakozóáramú áramforráshoz sorosan egy R ohmos ellenállást, egy L induktivitású tekercset és egy C kapacitású kondenzátort kapcsolunk, akkor az ú.n. soros RLC áramkört kapjuk:



Tegyük fel, hogy R, L, C konstans értékek. Jelölje a t időpontban $E(t)$ az áramforrás által az áramkörbe juttatott „külső” feszültséget, $I(t)$ az áramkörben folyó áramerősséget, $Q(t)$ a kondenzátor töltését. Ekkor a tekercs két vége között $L\frac{dI}{dt}$ önindukciós feszültség, a kondenzátoron pedig Q/C feszültség lép fel, ezért Kirchoff második törvénye alapján

$$E(t) = L\frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} + RI.$$

Ebből az $I = \frac{dQ}{dt} = Q'$ összefüggést alkalmazva kapjuk, hogy

$$LQ'' + RQ' + \frac{1}{C}Q = E(t). \tag{1.9}$$

Az egyenlethez rendelt kezdeti értékek:

$$Q(0) = Q_0, \qquad Q'(0) = I(0) = I_0. \tag{1.10}$$

Ha $E(t)$ differenciálható, akkor az egyenlet mindkét oldalát deriválva kapjuk az áramerősségre vonatkozó egyenletet:

$$LI'' + RI' + \frac{1}{C}I = E'(t).$$

Ekkor $I'(0)$-t az (1.9) egyenlet segítségével fejezhetjük ki:

$$I(0) = I_0, \qquad I'(0) = \frac{1}{L}\left(E(t_0) - RI_0 - \frac{1}{C}Q_0\right).$$

Oldjuk meg az (1.9)-(1.10) kezdeti érték feladatot. Az (1.9) egyenlet mindkét oldalának Laplace-transzformáltját véve kapjuk

$$Ls^2\mathcal{L}\{Q\}(s) - LsQ(0) - LQ'(0) + Rs\mathcal{L}\{Q\}(s) - RQ(0) + \frac{1}{C}\mathcal{L}\{Q\}(s) = \mathcal{L}\{E\}(s).$$

Ebből kapjuk

$$\mathcal{L}\{Q\}(s) = \Phi(s) + \Psi(s),$$

ahol

$$\Phi(s) = \frac{(Ls+R)Q_0 + LI_0}{Ls^2 + Rs + \frac{1}{C}}, \qquad \Psi(s) = \frac{\mathcal{L}\{E\}(s)}{Ls^2 + Rs + \frac{1}{C}},$$

és így

$$Q(t) = \phi(t) + \psi(t),$$

ahol $\mathcal{L}\{\phi(t)\}(s) = \Phi(s)$ és $\mathcal{L}\{\psi(t)\}(s) = \Psi(s)$. Vegyük észre, hogy $\phi(t)$ az

$$Ly'' + Ry' + \frac{1}{C}y = 0, \qquad y(0) = Q_0, \quad y'(0) = I_0$$

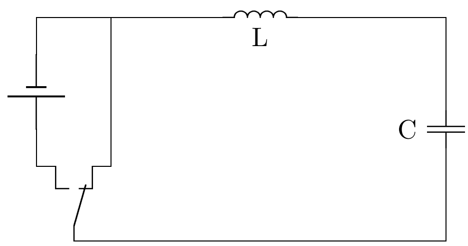
feladat megoldása, és $\psi(t)$ pedig az

$$Ly'' + Ry' + \frac{1}{C}y = E(t), \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

feladat megoldása.

Most tekintsük az (1.9)-(1.10) feladat speciális eseteit.

1. eset: Tegyük fel, hogy áramkörben levő elemek ellenállása 0-nak tekinthető (ú.n. LC kör), azaz $R = 0$, és nincs külső feszültség a rendszeren ($E(t) = 0$), azaz feltöltjük egy teleppel a kondenzátort, majd a telepet lekapcsoljuk az áramkörből:



Számítsuk ki az (1.9)-(1.10) kezdeti érték feladat megoldását. Ahogy azt már láttuk,

$$\mathcal{L}\{Q\}(s) = \Phi(s) = \frac{L(sQ_0 + I_0)}{Ls^2 + \frac{1}{C}}.$$

Vezessük be az

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

jelölést. Ezt a jelölést használva kapjuk

$$\mathcal{L}\{Q\}(s) = Q_0 \frac{s}{s^2 + \omega_0^2} + \frac{I_0}{\omega_0} \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2},$$

és ezért

$$Q(t) = \phi(t) = Q_0 \cos \omega_0 t + \frac{I_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t.$$

Ekkor tehát a rendszer egy ω_0 frekvenciájú szabadrezgést végez. (Az ω_0 számot a rendszer *sajátfrekvenciájának* nevezzük.)

2. eset: Tegyük fel, hogy $R = 0$, $Q_0 = 0$, $I_0 = 0$, és $E(t) = E_0 \cos \omega t$ külső feszültség hat a rendszerre, ahol $\omega \neq \omega_0$, $E_0 \in \mathbb{R}$. Ekkor

$$\mathcal{L}\{Q\}(s) = \Psi(s) = \frac{E_0}{L\omega_0} \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} \frac{s}{s^2 + \omega^2},$$

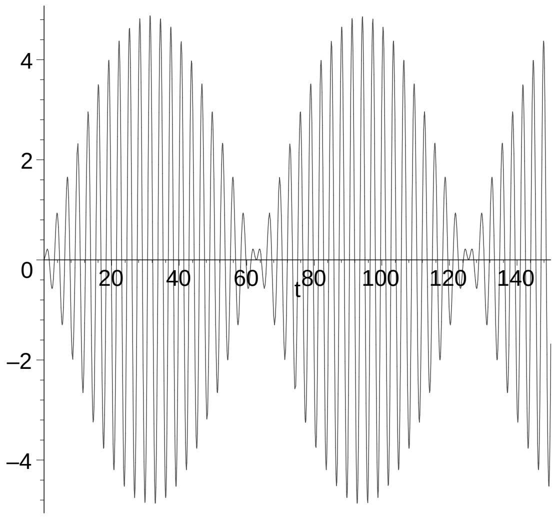
és ezért

$$\begin{aligned} Q(t) &= \psi(t) \\ &= \frac{E_0}{L\omega_0}\int_0^t \sin(\omega_0(t-u))\cos\omega u\,du \\ &= \frac{E_0}{2L\omega_0}\int_0^t \Big(\sin(\omega_0(t-u)+\omega u)+\sin(\omega_0(t-u)-\omega u)\Big)du \\ &= \frac{E_0}{2L\omega_0}\left(\frac{\cos\omega t-\cos\omega_0 t}{\omega_0-\omega}+\frac{\cos\omega t-\cos\omega_0 t}{\omega_0+\omega}\right) \\ &= \frac{E_0}{L(\omega_0^2-\omega^2)}(\cos\omega t-\cos\omega_0 t) \\ &= \frac{2E_0}{L(\omega_0^2-\omega^2)}\sin\frac{(\omega_0-\omega)t}{2}\sin\frac{(\omega_0+\omega)t}{2}. \end{aligned}$$

Ha $|\omega_0-\omega|$ kicsi, akkor $\omega_0+\omega > |\omega_0-\omega|$, és így a megoldás utóbbi képletét úgy is tekinthetjük, hogy az egy gyorsan oszcilláló függvény, $\sin\frac{(\omega_0+\omega)t}{2}$, amelynek az amplitúdója,

$$\frac{2E_0}{L(\omega_0^2-\omega^2)}\sin\frac{(\omega_0-\omega)t}{2}$$

lassan oszcillál. Ezt a jelenséget *lebegésnek* hívják, amely tehát akkor figyelhető meg, ha a külső erő frekvenciája közel megegyezik a rendszer sajátfrekvenciájával. Egy ilyen megoldás grafikonja látható a következő ábrán.



$L=2,\ C=1/8,\ E_0=1,\ \omega_0=2,\ \omega=2.1.$

3. eset: Tegyük fel, hogy $R=0$, $Q_0=0$, $I_0=0$, és $E(t)=E_0\cos\omega_0 t$, azaz a rendszer sajátfrekvenciájával megegyező frekvenciájú külső erő hat a rezgőkörre. Ekkor

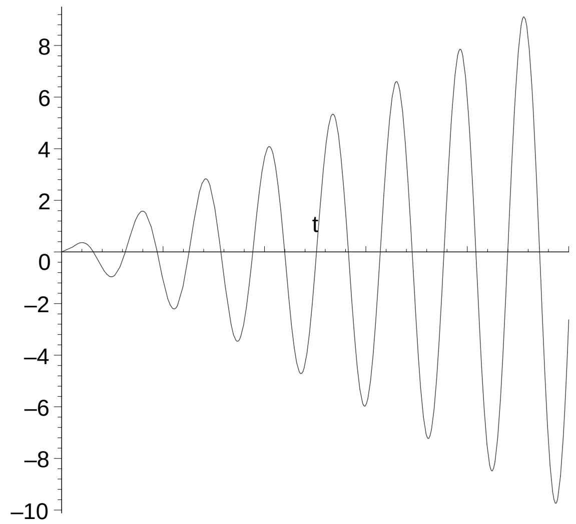
$$\mathcal{L}\{Q\}(s)=\Psi(s)=\frac{E_0}{L\omega_0}\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}\frac{s}{s^2+\omega_0^2},$$

és ezért

$$\begin{aligned} Q(t) &= \psi(t) \\ &= \frac{E_0}{L\omega_0}\int_0^t \sin(\omega_0(t-u))\cos\omega_0 u\,du \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{E_0}{2L\omega_0}\int_0^t \Big(\sin(\omega_0(t-u)+\omega_0 u)+\sin(\omega_0(t-u)-\omega_0 u)\Big)du \\
&= \frac{E_0}{2L\omega_0} t\sin\omega_0 t.
\end{aligned}
$$

Ebben az esetben tehát egy olyan oszcilláló megoldást kaptunk, amelynek amplitúdója tart végtelenbe, ha $t \to \infty$. Ezt a jelenséget *rezonanciának* hívják.



$L=1$, $C=1/25$, $E_0=1$, $\omega_0=5$.

4. eset: Tegyük fel, hogy $R=0$, $Q_0\in\mathbb{R}$, $I_0\in\mathbb{R}$, és $E(t)=E_0\cos\omega t$ külső feszültség hat a rendszerre, ahol $\omega\neq\omega_0$, $E_0\in\mathbb{R}$. Ekkor a megoldás az 1. és 2. esetben kiszámított két függvény összege lesz:

$$Q(t)=Q_0\cos\omega_0 t+\frac{I_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t+\frac{E_0}{L(\omega_0^2-\omega^2)}(\cos\omega t-\cos\omega_0 t).$$

□

A következő példa azt illusztrálja, hogy a Laplace-transzformáció módszere alkalmazható konstans együtthatós lineáris differenciálegyenlet-rendszerek megoldására is.

1.42. Példa. Oldjuk meg az

$$
\begin{aligned}
x' &= 3x-2y+e^t, \qquad x(0)=2,\\
y' &= x+6y-e^t, \qquad y(0)=-1
\end{aligned}
$$

rendszert!

Vegyük mindkét egyenlet mindkét oldalának Laplace-transzformáltját, és használjuk az $X=\mathcal{L}\{x\}$ és $Y=\mathcal{L}\{y\}$ jelöléseket:

$$
\begin{aligned}
sX(s)-x(0) &= 3X(s)-2Y(s)+\frac{1}{s-1}\\
sY(s)-y(0) &= X(s)+6Y(s)-\frac{1}{s-1}.
\end{aligned}
$$

A kezdeti feltételeket használva

$$\begin{aligned}(s-3)X(s)+2Y(s) &= 2+\frac{1}{s-1}\\ -X(s)+(s-6)Y(s) &= -1-\frac{1}{s-1}.\end{aligned}$$

Az egyenletrendszert megoldva kapjuk

$$\begin{aligned}X(s) &= \frac{2s^2-11s+6}{(s-4)(s-5)(s-1)}\\ Y(s) &= -\frac{s^2-5s+1}{(s-4)(s-5)(s-1)},\end{aligned}$$

és így parciális törtekre bontva

$$\begin{aligned}x(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s^2-11s+6}{(s-4)(s-5)(s-1)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{1}{4}\frac{1}{s-1}+2\frac{1}{s-4}+\frac{1}{4}\frac{1}{s-5}\right\}\\ &= -\frac{1}{4}e^{t}+2e^{4t}+\frac{1}{4}e^{5t}\\ y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2-5s+1}{(s-4)(s-5)(s-1)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{4}\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s-4}-\frac{1}{4}\frac{1}{s-5}\right\}\\ &= \frac{1}{4}e^{t}-e^{4t}-\frac{1}{4}e^{5t}.\end{aligned}$$

□