4. Absztrakt terek elmélete

4.1. Lineáris terek

4.1. Definíció. Az X halmazt *lineáris térnek* vagy *vektortérnek* nevezzük a valós számtest (komplex számtest) felett, ha bármely $x, y \in X$ elemekre és $\lambda \in \mathbb{R}$ ($\lambda \in \mathbb{C}$) skaláris értékre az

$$(x, y) \longmapsto x + y \in X \qquad \text{és} \qquad (\lambda, x) \longmapsto \lambda x \in X$$

műveletek értelmezve vannak, és amelyekre teljesülnek a következő axiómák:

1. $x + y = y + x$ (kommutativitás), $x, y \in X$;
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$ (asszociativitás), $x, y, z \in X$;
3. van olyan Θ nullelem (zéruselem), hogy $\Theta \in X$ és $x + \Theta = x$ minden $x \in X$-re, (a következőkben Θ helyett általában egyszerűen a 0 jelölést használjuk);
4. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y, \quad \lambda \in \mathbb{R}$ ($\lambda \in \mathbb{C}$), $\quad x, y \in X$;
5. $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ($\lambda, \mu \in \mathbb{C}$), $\quad x \in X$;
6. $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ($\lambda, \mu \in \mathbb{C}$), $\quad x \in X$;
7. $0 \cdot x = \Theta$ és $1 \cdot x = x$, $(0, 1 \in \mathbb{R})$, $\quad x \in X$.

A valós számtest feletti lineáris teret röviden *valós lineáris térnek* (*valós vektortérnek*), a komplex számtest feletti lineáris teret pedig *komplex lineáris térnek* (*komplex vektortérnek*) is nevezzük. A lineáris tér elemeit *vektoroknak* vagy *pontoknak* is nevezzük.

Az x vektor -1-szeresét $-x$-szel jelöljük. Az x és y vektorok különbsége alatt az $x + (-y)$ összeget értjük és $x - y$ -nal jelöljük.

4.2. Példa. Az $\mathbb{R}^n$ valós ($\mathbb{C}^n$ komplex) szám-n-esek halmaza valós (komplex) lineáris tér a következő műveletekkel: Legyen $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n)$ valós (komplex) szám-n-es, és λ valós (komplex) szám. Ekkor definíció szerint

$$x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \qquad \text{és} \qquad \lambda x = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)\,.$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy ezek a műveletek teljesítik a lineáris tér tulajdonságait. □

4.3. Példa. Jelöljük $\mathbb{R}^\infty$-nel a valós (végtelen) számsorozatok halmazát, azaz $x \in \mathbb{R}^\infty$, ha $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$. Ekkor $\mathbb{R}^\infty$ lineáris tér a szokásos műveletekkel: legyen

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots), \qquad y = (y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots), \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ekkor definíció szerint

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n, \ldots) \qquad \text{és} \qquad \lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n, \ldots).$$

Ezt a lineáris teret a valós számsorozatok lineáris terének nevezzük. Nyilván a komplex számsorozatok $\mathbb{C}^\infty$-nel jelölt halmaza hasonló módon (komplex) lineáris teret képez. □

4.4. Példa. Jelölje $C([a,b],\mathbb{R})$ az $[a,b]$ intervallumon értelemezett valós értékű folytonos függvények halmazát. Ezen a halmazon bevezetjük a következő műveleteket: Ha $f,g\colon [a,b]\to\mathbb{R}$, akkor $f+g$ jelöli azt az $[a,b]$-n definiált függvényt, amelyet az $(f+g)(t)=f(t)+g(t)$ képlettel definiálunk. Hasonlóan, $\lambda\in\mathbb{R}$-ra λf az az $[a,b]$-n értelmezett függvény, amelyet a $(\lambda f)(t)=\lambda f(t)$ képlettel értelmezünk. Mivel folytonos függvények összege és konstansszorosa is folytonos függvény, ezért $f+g,\lambda f\in C([a,b],\mathbb{R})$, és ellenőrizhető, hogy az összeadás és a skaláris számmal való szorzás teljesítik a 4.1. Definíció mind a 7 követelményét, azaz $C([a,b],\mathbb{R})$ valós lineáris tér.

Hasonló módon definiálhatjuk a $C([a,b],\mathbb{C})$-t, az $[a,b]$ intervallumon értelemezett komplex értékű folytonos függvények halmazát, amely lineáris tér a komplex számtest felett. □

4.5. Példa. Jelölje $C^k([a,b],\mathbb{R})$ az $[a,b]$ intervallumon értelemezett, k-szor folytonosan differenciálható valós függvények halmazát. Az előző példához hasonlóan megmutatható, hogy ez a halmaz is lineáris tér az összeadás és a skaláris számmal való szorzás műveletekkel.

Jelölje $C^\infty([a,b],\mathbb{R})$ az akárhányszor differenciálható, $[a,b]$-n értelmezett valós függvények halmazát, amely szintén lineáris tér. □

4.6. Példa. Ha a 4.4. Példában definiált $C([a,b],\mathbb{R})$ folytonos valós függvények lineáris terének vesszük azt az Y részhalmazát, amely az $[a,b]$ intervallumon értelmezett nemnegatív folytonos valós függvényeket tartalmazza, akkor Y nem lineáris tér, hiszen az összeadásra ugyan zárt lesz, de ha Y egy (nem nulla) elemét egy negatív skaláris számmal szorozzuk, az már nem lesz eleme Y-nak. □

4.7. Definíció. Egy X lineáris tér Y részhalmazát lineáris *altérnek* nevezzük, ha Y maga is lineáris tér az X-en bevezetett összeadás és skaláris szorzás műveletekre nézve. Tehát ha $x,y\in Y$, akkor $x+y\in Y$, és ha $\lambda\in\mathbb{R}$ ($\lambda\in\mathbb{C}$), akkor $\lambda x\in Y$.

4.8. Példa. Legyen $C([a,b],\mathbb{R})$ a 4.4. Példában definiált folytonos valós függvények lineáris tere. Ekkor könnyen látható, hogy $C([a,b],\mathbb{R})$-nek altere lesz az $Y=\{f\in C([a,b],\mathbb{R}):\ f(a)=0\}$ halmaz. □

4.9. Példa. Könnyen látható, hogy a

$$C([a,b],\mathbb{R})\supset C^1([a,b],\mathbb{R})\supset C^2([a,b],\mathbb{R})\supset C^3([a,b],\mathbb{R})\supset\cdots\supset C^\infty([a,b],\mathbb{R})$$

tartalmazások teljesülnek, és a fenti tartalmazásláncban szereplő szűkebb halmaz a láncban szereplő bővebb lineáris tér altere. □

4.10. Példa. Legyen Y azon részhalmaza $\mathbb{R}^\infty$-nek, amelyek a konvergens sorozatokból állnak. Mivel bármely két konvergens sorozat összege illetve konstansszorosa is konvergens, ezért Y altér $\mathbb{R}^\infty$-ben. □

4.11. Definíció. Az $x,y\in X$ elemek *lineáris kombinációja* alatt a $\lambda x+\mu y$ alakú elemet értjük, ahol λ,μ skaláris szám (azaz valós vagy komplex szám). Hasonlóan, az $x_1,\dots,x_n\in X$ elemek lineáris kombinációja alatt az $\lambda_1x_1+\cdots+\lambda_nx_n$ összeget értjük, ahol $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ skaláris számok.

Az $x_1,\dots,x_n\in X$ elemeket *lineárisan összefüggőnek* nevezzük, ha vannak olyan nem csupa nulla $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ skaláris számok, hogy $\lambda_1x_1+\cdots+\lambda_nx_n=0$. Ellenkező esetben az $x_1,\dots,x_n$

elemeket *lineárisan függetleneknek* nevezzük. (Ha tehát $x_1, \ldots, x_n$ lineárisan független, akkor $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = 0$-ból következik, hogy $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$.)

A $\mathcal{H} \subset X$ halmazt *lineárisan függetlennek* nevezzük, ha minden véges részhalmaza lineárisan független.

Azt mondjuk, hogy $\mathcal{H} \subset X$ *előállítja* (*generálja, kifeszíti*) az X lineáris teret, ha az X minden vektora a $\mathcal{H}$ elemeinek (véges) lineáris kombinációja.

4.12. Példa. Definiáljuk az $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, 0, \ldots, 0, 1)$ szám-n-eseket, és legyen $\mathcal{H} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. Ekkor a $\mathcal{H}$ halmaz előállítja az $\mathbb{R}^n$ lineáris teret, hiszen egy tetszőleges $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ vektorra $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots x_n e_n$. □

4.13. Példa. A $C([a, b], \mathbb{R})$ folytonos függvények terében jelölje Y a legfeljebb n-edfokú polinomok halmazát. Ekkor Y nyilván lineáris altér, mivel két legfeljebb n-edfokú polinom összege is egy legfeljebb n-edfokú polinom, valamint egy legfeljebb n-edfokú polinom konstansszorosa is legfeljebb n-edfokú polinom. Legyen $\mathcal{H} = \{1, t, \ldots, t^n\}$ a legfeljebb n-edfokú hatványfüggvények halmaza. Ekkor ellenőrizhető, hogy az $1, t, \ldots, t^n$ polinomok lineárisan függetlenek, másrészt előállítják az Y alteret, hiszen $p \in Y$ akkor és csak akkor, ha $p(t) = a_0 + a_1 t + \cdots a_n t^n$.

Az $[a, b]$ intervallumon értelmezett összes polinomok halmaza ugyancsak lineáris altér, azonban ennek a halmaznak az elemeit a megszámlálhatóan végtelen sok elemet tartalmazó $\mathcal{H} = \{1, t, \ldots, t^n, \ldots\}$ halmaz állítja elő. □

4.14. Példa. Tekintsük a végtelen valós számsorozatok $\mathbb{R}^\infty$ lineáris terét. Jelölje e_i azt a végtelen valós számsorozatot, amelynek i-edik eleme 1, a többi 0, azaz

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, 0, 0 \ldots), \\ e_2 &= (0, 1, 0, 0 \ldots), \\ e_3 &= (0, 0, 1, 0, \ldots), \\ \vdots & \qquad \vdots \end{aligned}$$

és legyen $\mathcal{H} = \{e_1, e_2, e_3, \ldots\}$. Ekkor $\mathcal{H}$ megszámlálható részhalmaza $\mathbb{R}^\infty$-nek, és a $\mathcal{H}$ halmaz lineárisan független. Másrészt $\mathcal{H}$ azt a Y alteret állítja elő $\mathbb{R}^\infty$-ben, amely azon sorozatokat tartalmazza, amelyekben véges sok elem kivételével csupa 0 áll. Valóban, a $\mathcal{H}$-beli elemek (véges) lineáris kombinációjával csak olyan sorozatot kapunk, amelyben véges sok tag kivételével minden tag 0. Fordítva, ha $x \in Y$ olyan, hogy $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$, és minden $x_i = 0$, ha $i > n$, akkor $x = x_1 e_1 + \cdots x_n e_n$. □

Lineáris algebrából ismert a következő állítás.

4.15. Állítás. *Ha $\mathcal{H}_1$ és $\mathcal{H}_2$ véges lineárisan független halmazok, és mindketten előállítják az X lineáris teret, akkor $\mathcal{H}_1$ és $\mathcal{H}_2$ számossága megegyezik.*

4.16. Definíció. A $\mathcal{H}$ halmazt az X lineáris tér *bázisának* nevezzük, ha $\mathcal{H}$ előállítja az X lineáris teret. Ha az X lineáris tér egy $\mathcal{H}$ bázisa csak véges sok vektort tartalmaz, akkor azt mondjuk, hogy az X lineáris tér *véges dimenziós*, és a $\mathcal{H}$ elemeinek a számát az X lineáris tér *dimenziójának* hívjuk. Ha az X lineáris térnek nincs véges bázisa, akkor X-et *végtelen dimenziós* lineáris térnek nevezzük.

A 4.15. Állítás szerint egy véges dimenziós lineáris tér dimenziója egyértelműen meghatározott. Végtelen dimenziós terekben is megmutatható, hogy mindig létezik bázis, de ezzel ebben a jegyzetben nem foglalkozunk.

4.17. Példa. A 4.12. Példa alapján látható, hogy az $\mathbb{R}^n$ ill. a $\mathbb{C}^n$ lineáris terek n-dimenziós vektorterek.

A 4.13. Példából következik, hogy a $C([a,b],\mathbb{R})$ tér végtelen dimenziós tér, hiszen a $\mathcal{H} = \{1, t, \dots, t^n, \dots\}$ halmaz a tér egy végtelen lineárisan független részhalmaza.

A 4.14. Példa szerint a végtelen valós sorozatok $\mathbb{R}^\infty$ halmaza is végtelen dimenziós lineáris tér, hiszen az $e_1, e_2, \dots$ elemek lineárisan függetlenek. □

4.18. Definíció. Azt mondjuk, hogy K az X lineáris tér *konvex részhalmaza*, ha bármely két pontját összekötő szakasz minden pontja benne van K-ban, azaz ha $x, y \in K$, akkor bármely $\alpha \in [0,1]$-re $\alpha x + (1-\alpha)y \in K$.

4.19. Példa. A végtelen valós sorozatok lineáris terének vegyük azt a K részhalmazát, hogy $K = \{x = (x_1, x_2, \dots) : \ x_i \geq 0$ minden $i = 1, 2, \dots$-re$\}$. Ekkor könnyen ellenőrizhető, hogy K konvex. □

4.20. Definíció. Azt mondjuk, hogy X és Y *izomorf lineáris terek*, ha létezik $T : X \to Y$ *izomorfizmus*, azaz olyan T, hogy $\mathrm{Dom}(T) = X$, $\mathrm{Im}(T) = Y$ és T kölcsönösen egyértelmű ráképezés (*bijekció*), amely lineáris.

4.21. Tétel. *Minden n-dimenziós X valós (komplex) lineáris tér izomorf az $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$) szám-n-esek terével.*

Bizonyítás: Legyen $\{e_1, \dots, e_n\}$ az X egy bázisa. Ekkor tetszőleges $x \in X$-hez vannak olyan $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ skaláris számok, hogy

$$x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k.$$

Legyen $Tx = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Ekkor $T : X \to \mathbb{R}^n$, $\mathrm{Dom}(T) = X$, $\mathrm{Im}(T) = \mathbb{R}^n$ és könnyen ellenőrizhető, hogy T bijektív lineáris operátor, azaz izomorfizmus a két lineáris tér között. □

4.2. Normált terek

A valós számokra ismert abszolút érték tulajdonságai általánosításával kapjuk a norma és a normált tér fogalmát.

4.22. Definíció. Egy X valós (komplex) lineáris téren értelmezett $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ függvényt *normának* nevezzük, ha

1. $\|x\| \geq 0, \quad x \in X \qquad$ és $\qquad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \Theta.$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|, \qquad x \in X, \ \lambda \in \mathbb{R}$ ($\lambda \in \mathbb{C}$).
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \qquad x, y \in X$ (háromszög-egyenlőtlenség)

Az $(X, \|\cdot\|)$ párost *normált térnek* hívjuk.

Az alábbi állításból következik, hogy minden norma egyben folytonos függvény.

4.23. Állítás. *Legyen $\|\cdot\|$ egy norma az X lineáris téren. Ekkor minden $x, y \in X$-re*

$$\Big|\|x\| - \|y\|\Big| \leq \|x - y\|.$$

Bizonyítás: A háromszög-egyenlőtlenség szerint $\|x\| = \|x - y + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|$, amiből $\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$ adódik. Ugyanígy látható be, hogy $\|y\| - \|x\| \leq \|x - y\|$, amiből következik az állítás.

□

4.24. Példa. Tekintsük a valós szám-n-esek $\mathbb{R}^n$ lineáris terét. Ezen különböző normákat definiálhatunk:

Legyen $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Az

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$$

képlet a síkbeli és térbeli geometriai vektorok hosszának természetes általánosítása, *kettes-* vagy *euklideszi-normának* nevezzük. A norma 1. és 2. tulajdonságai könnyen ellenőrizhetők. A háromszög-egyenlőtlenség a Minkowski-egyenlőtlenségből kapjuk (lásd a 4.27. Állítást).

Az

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

képlettel definiált normát *1-es normának* nevezzük. Ez valóban norma $\mathbb{R}^n$-en, hiszen a norma 1. és 2. tulajdonsága triviálisan teljesül, a 3. pedig a valós számokra vonatkozó háromszög-egyenlőtlenségből következik, hiszen $\|x + y\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| + \sum_{i=1}^{n} |y_i| = \|x\|_1 + \|y\|_1$.

Az

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

kifejezést végtelen- vagy *supremum-normának* nevezzük. Az olvasóra bízzuk annak ellenőrzését, hogy ez a képlet norma $\mathbb{R}^n$-en.

Megmutatható, hogy minden $p \geq 1$-re a

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$$

képlet norma $\mathbb{R}^n$-n. A normát *p-normának* hívjuk. (A háromszög-egyenlőtlenség bizonyításához lásd a 4.27. Állítást). Ennek speciális esetei a fenti képletek. (Megmutatható, hogy $\|x\|_\infty = \lim_{p \to \infty} \|x\|_p$.)

A fenti képletekkel $\mathbb{C}^n$-n is definiálhatunk normákat. □

Szükségünk lesz az alábbi elemi egyenlőtlenségre:

4.25. Lemma (Young-egyenlőtlenség). *Minden $a, b \geq 0$-ra*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},$$

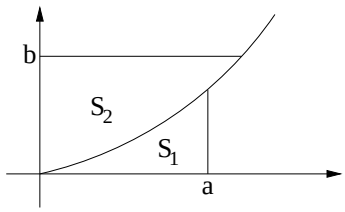
ahol

$$p > 1, \quad q > 1 \qquad \text{és} \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Bizonyítás: Tekintsük az $y = x^{p-1}$ görbét. Ekkor könnyen ellenőrizhető, hogy $x = y^{q-1}$. Legyen

$$S_1 = \int_0^a x^{p-1}\,dx = \frac{a^p}{p} \qquad \text{és} \qquad S_2 = \int_0^b y^{q-1}\,dy = \frac{b^q}{q}.$$

Ekkor az S_1 és S_2 az alábbi ábrán látható területek,



így nyilván tetszőleges $a, b \geq 0$-ra

$$ab \leq S_1 + S_2 = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

teljesül. □

4.26. Állítás (Hölder-egyenlőtlenség). *Tetszőleges $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ komplex számokra*

$$\sum_{k=1}^n |a_k b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^q\right)^{1/q}$$

teljesül, minden olyan p és q-ra, ahol

$$p > 1, \quad q > 1 \qquad \text{és} \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Bizonyítás: Legyen

$$A = \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p\right)^{1/p} \qquad \text{és} \qquad B = \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^q\right)^{1/q}.$$

Ha $A = 0$ vagy $B = 0$, akkor minden $a_k = 0$ illetve $b_k = 0$, és az állítás teljesül. Feltehető tehát, hogy $A \neq 0$ és $B \neq 0$. Elegendő tehát megmutatnunk, hogy

$$\sum_{k=1}^n \frac{|a_k|}{A}\frac{|b_k|}{B} \leq 1.$$

A 4.25. Lemmát alkalmazva

$$\sum_{k=1}^n \frac{|a_k|}{A}\frac{|b_k|}{B} \leq \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{p}\frac{|a_k|^p}{A^p} + \frac{1}{q}\frac{|b_k|^q}{B^q}\right) = \frac{1}{p}\frac{\sum_{k=1}^n |a_k|^p}{A^p} + \frac{1}{q}\frac{\sum_{k=1}^n |b_k|^q}{B^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

□

4.27. Állítás (Minkowski-egyenlőtlenség). *Bármely $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ komplex számra és $p \geq 1$-re*

$$\left(\sum_{k=1}^n |a_k + b_k|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^p\right)^{1/p}.$$

Bizonyítás: $p = 1$-re az állítás rögtön következik az abszolút értékre vonatkozó háromszög-egyenlőtlenségből. Legyen $p > 1$ és q olyan, hogy $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Ekkor a Hölder-egyenlőtlenséget felhasználva kapjuk,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^p &\leq \sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^{p-1}(|a_k| + |b_k|) \\
&= \sum_{k=1}^{n} |a_k||a_k + b_k|^{p-1} + \sum_{k=1}^{n} |b_k||a_k + b_k|^{p-1} \\
&\leq \left(\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p \right)^{1/p} \right) \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^{(p-1)q} \right)^{1/q}.
\end{aligned}$$

Mivel $(p-1)q = p$, ezért egyszerűsítés után kapjuk a bizonyítandó egyenlőtlenséget. □

4.28. Példa. Definiáljuk $f \in C([a,b], \mathbb{R})$-re az

$$\|f\|_\infty = \max_{a \leq t \leq b} |f(t)|$$

normát, amellyel a $C([a,b], \mathbb{R})$ lineáris tér normált tér. □

4.29. Példa. A $C([a,b], \mathbb{R})$ folytonos függvények terén értelmezhetünk más normát is: legyen például

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|\, dt.$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy $\|\cdot\|_1$ teljesíti a norma mindhárom tulajdonságát. □

4.30. Példa. A Riemann-integrál egy fontos általánosítása az ú.n. Lebesgue-integrál. Ezt az integrálfogalmat itt nem tudjuk definiálni, csak annyit jegyzünk meg, hogy folytonos és szakaszonként folytonos függvények Lebesgue-integrálhatók és a Lebesgue-integráljuk értéke megegyezik a függvény Riemann-integráljával. A Lebesgue-integrál rendelkezik az integráloknál megszokott azonosságokkal, de számos új tulajdonsága is van.

Jelöljük az $[a,b]$ intervallumon értelmezett valós értékű, végesen Lebesgue-integrálható függvények lineáris terét $L^1([a,b], \mathbb{R})$-rel. Ezen a vektortéren definiáljuk az m Lebesgue-mérték szerinti

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f|\, dm$$

kifejezést. Könnyen ellenőrizhető, hogy $\|f\|_1 \geq 0$ minden f-re, és $\|\cdot\|_1$ teljesíti a norma 2. és 3. tulajdonságait is. Viszont abból, hogy $\|f\|_1 = 0$, csak az következik, hogy $f(x) = 0$ majdnem minden $x \in [a,b]$-re. Ezért az $L^1([a,b], \mathbb{R})$ halmazt az $\|\cdot\|_1$ függvénnyel úgy tekinthetjük normált térnek, hogy a majdnem mindenütt azonos függvényeket azonosnak tekintjük. □

4.31. Példa. Az előző példához hasonlóan legyen $L^2([a,b], \mathbb{R})$ azon Lebesgue-mérhető függvények lineáris tere, amelyre az $\int_a^b |f|^2\, dm$ Lebesgue-integrál véges. (Itt is a majdnem mindenütt azonos függvényeket azonosnak tekintjük.) Megmutatható, hogy ezen a halmazon az

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f|^2\, dm}$$

függvény norma. A háromszög-egyenlőtlenség igazolását lásd később (4.69. Tétel és a 4.75. Példa). Ugyanezzel a képlettel a $L^2([a,b],\mathbb{C})$ lineáris téren is normát definiálhatunk. □

4.32. Példa. Az $\mathbb{R}^n$ térhez hasonlóan a függvényekre is értelmezhetjük a p-norma fogalmát, amely általánosítja az előző két példában szereplő eseteket. Legyen $1 \le p < \infty$, és legyen $L^p([a,b],\mathbb{R})$ azon Lebesgue-mérhető függvények lineáris tere, amelyre az $\int_a^b |f|^p\,dm$ Lebesgue-integrál véges. (Megint a majdnem mindenütt azonos függvényeket azonosnak tekintjük.) Megmutatható, hogy ezen a halmazon az

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f|^p\,dm\right)^{1/p}$$

függvény norma. Ehhez először belátható a 4.26. Állítás bizonyításához hasonló módon a Hölder-egyenlőtlenség

$$\int_a^b |fg|\,dm \le \left(\int_a^b |f|^p\,dm\right)^{1/p}\left(\int_a^b |g|^q\,dm\right)^{1/q}, \qquad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \tag{4.1}$$

változata, és ennek segítségével beláthatjuk a Minkowski-egyenlőtlenség

$$\left(\int_a^b |f+g|^p\,dm\right)^{1/p} \le \left(\int_a^b |f|^p\,dm\right)^{1/p} + \left(\int_a^b |g|^p\,dm\right)^{1/p}, \qquad p \ge 1,$$

alakját. A részleteket az olvasóra bízzuk.

Megmutatjuk, hogy ha $p<q$, akkor $L^q([a,b],\mathbb{R}) \subset L^p([a,b],\mathbb{R})$, azaz speciálisan az

$$L^1([a,b],\mathbb{R}) \supset L^2([a,b],\mathbb{R}) \supset L^3([a,b],\mathbb{R}) \supset \cdots$$

tartalmazások teljesülnek. Legyen $p' = q/p$ és $q' = q/(q-p)$. Ekkor $1/p' + 1/q' = 1$. A (4.1) egyenlőtlenséget alkalmazva p' és q'-re az f^p és $g=1$ függvénnyel kapjuk

$$\int_a^b |f|^p\,dm \le \left(\int_a^b |f|^{pp'}\,dm\right)^{1/p'}\left(\int_a^b 1\,dm\right)^{1/q'} = \left(\int_a^b |f|^q\,dm\right)^{1/p'}(b-a)^{1/q'} < \infty,$$

azaz $f \in L^p([a,b],\mathbb{R})$, ha $f \in L^q([a,b],\mathbb{R})$. □

4.33. Példa. Tekintsük a valós sorozatok $\mathbb{R}^\infty$ lineáris terének azt az ℓ_1 részhalmazát, amelyre

$$\ell_1 = \left\{x = (x_1, x_2, \ldots) \in \mathbb{R}^\infty \colon \sum_{n=1}^\infty |x_n| < \infty\right\},$$

vagyis ℓ_1 az abszolut konvergens végtelen sorok halmaza. Könnyen ellenőrizhető, hogy ezen a halmazon az

$$\|x\|_1 = \sum_{n=1}^\infty |x_n|$$

függvény normát definiál.

Hasonló módon legyen

$$\ell_2 = \left\{x = (x_1, x_2, \ldots) \in \mathbb{R}^\infty \colon \sum_{n=1}^\infty |x_n|^2 < \infty\right\},$$

és az ℓ_2-n tekintsük a

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2}$$

normát.

Az előző két képletet általánosítva legyen $1 \le p < \infty$, és legyen

$$\ell_p = \left\{ x = (x_1, x_2, \ldots) \in \mathbb{R}^\infty \colon \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\}.$$

Megmutatható, hogy a

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p}$$

képlet egy normát definiál ℓ_p-n. A háromszög-egyenlőtlenség bizonyításához először alkalmazzuk a Minkowski-egyenlőtlenséget:

$$\left(\sum_{n=1}^{N} |x_n + y_n|^p \right)^{1/p} \le \left(\sum_{n=1}^{N} |x_n|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{n=1}^{N} |y_n|^p \right)^{1/p},$$

amiből $N \to \infty$ határértéket véve adódik az állítás.

Végül legyen

$$\ell_\infty = \{ x = (x_1, x_2, \ldots) \in \mathbb{R}^\infty \colon (x_1, x_2, \ldots) \text{ korlátos sorozat} \},$$

ahol a

$$\|x\|_\infty = \sup_{n \ge 1} |x_n|$$

képlet egy normát definiál.

Megjegyezzük, hogy a fenti képletekkel a $\mathbb{C}^\infty$ megfelelő részhalmazain is normát definiálhatunk. □

4.3. Konvergencia normált terekben, normák ekvivalenciája

4.34. Definíció. Az $(X, \|\cdot\|)$ normált tér valamely (x_n) sorozata *konvergens*, ha van olyan $x \in X$ elem, hogy bármely $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan N küszöbszám, hogy ha $n > N$, akkor $\|x - x_n\| < \varepsilon$. (Más szóval, $\|x - x_n\| \to 0$, ha $n \to \infty$.) Jelölés: $x_n \to x$, ha $n \to \infty$, vagy $x = \lim_{n\to\infty} x_n$.

4.35. Definíció. Az (x_n) sorozat *Cauchy-sorozat*, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan N küszöbszám, hogy $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ valahányszor $n, m > N$.

Megjegyezzük, hogy a normált terekben a sorozat határértékének a definíciója csak annyiból tér el a valós számsorozatok konvergenciájának definíciójától, hogy abban a valós szám abszolút értéke helyett normát használunk. A normát definiáló 3 tulajdonság megegyezik az abszolút érték alapvető tulajdonságaival, és a valós számsorozatokra vonatkozó határérték tulajdonságainak levezetésekor csak az abszolút értéknek ezt a 3 tulajdonságát használtuk fel, ezért a normált térben ugyanazok az algebrai tulajdonságok teljesülnek a konvergens sorozatokra, mint a valós sorozatokra.

4.36. Tétel. *Legyen $(X, \|\cdot\|)$ egy normált tér, (x_n) egy X-beli sorozat.*

1. *Konvergens sorozatok határértéke egyértelmű.*
2. *Legyen $x_n \to x$ ha $n \to \infty$. Ekkor (x_n) bármely részsorozata is konvergens, és a határértéke x.*
3. *Ha az (x_n) sorozat konvergens, akkor* korlátos *is, azaz van olyan $M > 0$ valós szám, amelyre $\|x_n\| \le M$ minden $n \ge 1$-re.*
4. *Ha $x_n \to x$ és $y_n \to y$, akkor $\alpha x_n + \beta y_n \to \alpha x + \beta y$, ha $n \to \infty$.*
5. *Ha $x_n \to x$, akkor az $(\|x_n\|)$ számsorozat is konvergens, és $\|x_n\| \to \|x\|$, ha $n \to \infty$.*
6. *Ha az (x_n) sorozat konvergens, akkor Cauchy-sorozat is.*

Bizonyítás: A 6. pontot mutatjuk meg, a többi a valós esethez hasonlóan látható be.

Legyen (x_n) konvergens. Ekkor van olyan $x \in X$, hogy $x_n \to x$, ha $n \to +\infty$. Legyen $\varepsilon > 0$. Ekkor $\varepsilon/2$-höz is van olyan $N = N(\varepsilon/2)$, hogy $\|x_n - x\| < \frac{\varepsilon}{2}$, minden $n > N$-re. Így a háromszög-egyenlőtlenség alapján

$$\|x_n - x_m\| = \|x_n - x + x - x_m\| \le \|x_n - x\| + \|x - x_m\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \qquad n, m > N.$$

□

4.37. Definíció. Legyen adott $\|\cdot\|$ és $|||\cdot|||$ két norma az X lineáris téren. Azt mondjuk, hogy $\|\cdot\|$ és $|||\cdot|||$ *ekvivalens*, ha léteznek olyan m és M pozitív konstansok, hogy

$$m\|x\| \le |||x||| \le M\|x\|, \qquad x \in X.$$

Megjegyezzük, hogy a fenti definíció szimmentikus a két normára nézve, hiszen ha a fenti egyenlőtlenségek teljesülnek, akkor $\frac{1}{M}|||x||| \le \|x\| \le \frac{1}{m}|||x|||$ is teljesül.

Hangsúlyozni kell, hogy a normált térben a konvergencia fogalma függ a norma választásától. Elképzelhető, hogy az egyik normában az adott sorozat konvergens, de a másik normában nem. A következő állítás szerint viszont ekvivalens normák ugyanazt a határérték fogalmat definiálják.

4.38. Állítás. *Legyen adott $\|\cdot\|$ és $|||\cdot|||$ két ekvivalens norma az X lineáris téren, (x_k) egy sorozat X-en. Ekkor (x_k) akkor és csak akkor konvergens a $\|\cdot\|$ normában, ha konvergens a $|||\cdot|||$ normában, és a két normában a határértékek is megegyeznek.*

Bizonyítás: Az állítás rögtön következik az

$$m\|x_k - x\| \le |||x_k - x||| \le M\|x_k - x\|$$

egyenlőtlenségből, ahol m és M a normák ekvivalenciájának definíciójában szereplő konstansok.

□

4.39. Példa. Az $\mathbb{R}^n$-en az $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ és $\|\cdot\|_\infty$ normák ekvivalensek, mivel ellenőrizhető, hogy

$$\|x\|_1 \le \sqrt{n}\|x\|_2, \qquad \|x\|_2 \le \sqrt{n}\|x\|_\infty, \qquad \|x\|_\infty \le \|x\|_1, \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

(Az első becslés a Hölder-egyenlőtlenségből következik $p = q = 2$-re.) Ezért az $(x^{(k)})$ $\mathbb{R}^n$-beli sorozat akkor és csak akkor konvergens az egyik normában, ha a másikban is az. □

A következő tétel szerint egy tetszőleges véges dimenziós normált térben bármely két norma ekvivalens.

4.40. Tétel. *Legyen X egy véges dimenziós lineáris tér. Ekkor X-en bármely két norma ekvivalens.*

Bizonyítás: A bizonyítást csak az $X = \mathbb{R}^n$ speciális esetre adjuk meg. (A bizonyítás az $X = \mathbb{C}^n$ esetre triviálisan kiterjeszthető.)

Elegendő megmutatnunk, hogy egy tetszőleges $\|\cdot\|$ norma ekvivalens az $\|\cdot\|_1$ normával. Legyen $A = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \|x\|_1 = 1\}$. Ekkor A korlátos és zárt részhalmaza $\mathbb{R}^n$-nek, így bármely folytonos függvény felveszi minimumát és maximumát A-n. A 4.23. Állítás szerint a $\|\cdot\|$ függvény is folyonos, ezért

$$m = \min\{\|y\| \colon y \in A\} \qquad \text{és} \qquad M = \max\{\|y\| \colon y \in A\}$$

létezik és véges. Ekkor viszont tetszőleges $x \neq 0$-ra $\frac{x}{\|x\|_1} \in A$, ezért

$$m \leq \left\| \frac{x}{\|x\|_1} \right\| \leq M,$$

amiből következik, hogy $m\|x\|_1 \leq \|x\| \leq M\|x\|$ minden x-re. □

A tétel következményekén kapjuk:

4.41. Következmény. *Az $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ normált térben az $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)})$ $(k = 1, 2, \ldots)$ vektorsorozat akkor és csak akkor konvergál az $x = (x_1, \ldots, x_n)$ vektorhoz, ha $x_i^{(k)} \to x_i$ $(k \to \infty)$ minden $i = 1, \ldots, n$-re.*

Bizonyítás: A bizonyítás következik abból, hogy a 4.40. Tétel szerint feltehető, hogy $\|\cdot\| = \|\cdot\|_1$, és ekkor az

$$|x_i^{(k)} - x_i| \leq \|x^{(k)} - x\|_1 = \sum_{j=1}^{n} |x_j^{(k)} - x_j|, \qquad i = 1, \ldots, n$$

egyenlőtlenségekből adódik az állítás. □

4.42. Példa. Végtelen dimenziós térben viszont a koordinátánkénti konvergencia nem mindig ekvivalens a normában való konvergenciával. Ehhez elegendő az ℓ_1 teret tekinteni. Tekintsük a következő sorozatot ℓ_1-ben:

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= (1, 0, 0, 0, \ldots) \\ x^{(2)} &= (1, 1, 0, 0, \ldots) \\ x^{(3)} &= (1, 1, 1, 0, \ldots) \\ \vdots \quad & \quad \vdots \end{aligned}$$

azaz $x^{(k)}$ az a sorozat, amelynek az első k tagja 1, a többi pedig 0. Ekkor az $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots)$ sorozat bármely koordinátájára $x_i^{(k)} \to 1$, ha $k \to \infty$, másrészt $x^{(k)} \not\to (1, 1, 1, \ldots)$, hiszen a konstans 1 sorozat nincs is benne ℓ_1-ben.

Természetesen ez a példa ℓ_1 helyett bármely ℓ_p térben ugyanígy elmondható. □

4.43. Állítás. *A $(C([a, b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ normált térben $f_n \to f$, ha $n \to \infty$, akkor és csak akkor, ha az (f_n) függvénysorozat egyenletesen tart f-hez.*

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy $f_n \to f$ a $\|\cdot\|_\infty$ normában. Ekkor bármely $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan N küszöbszám, hogy

$$\|f_n - f\|_\infty = \max_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

ha $n > N$. Ekkor természetesen bármely $x \in [a,b]$-re $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, ha $n > N$, azaz (f_n) egyenletesen tart f-hez.

Tegyük fel most, hogy az (f_n) folytonos függvények sorozata egyenletesen konvergál f-hez. Ekkor tudjuk, hogy f folytonos függvény, és így $f_n - f$ is az, és mivel folytonos függvények felveszik maximális értéküket, ezért minden n-hez létezik olyan $x_n \in [a,b]$, hogy

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| = \max_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)|.$$

Így ha bármely $x \in [a,b]$-re $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, ha $n > N$, akkor $\max\limits_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| = |f_n(x_n) - f(x_n)| < \varepsilon$ is teljesül $n > N$-re, azaz $f_n \to f$ a $\|\cdot\|_\infty$ normában. □

A bizonyításból rögtön következik:

4.44. Következmény. *Legyen $f_n \in C([a,b],\mathbb{R})$ és tegyük fel, hogy valamely $[a,b]$-n értelmezett f függvényre $\|f_n - f\|_\infty \to 0$, ha $n \to \infty$. Ekkor f folytonos, azaz $f \in C([a,b],\mathbb{R})$.*

Megjegyezzük, hogy ha egy (f_n) függvénysorozat pontonként konvergál az f függvényhez az $[a,b]$ intervallumon, akkor még általában nem következik, hogy a supremum-normában is konvergens lenne a sorozat. Ehhez elegendő az $f_n(x) = x^n$ függvénysorozatot tekinteni a $[0,1]$ intervallumon.

Végtelen dimenziós terekre, ahogy azt az alábbi példa illusztrálja, már általában nem igaz a 4.40. Tétel.

4.45. Példa. Tekinsük a $C([0,1],\mathbb{R})$ lineáris teret. Az integrál becsléséből következik, hogy $\|f\|_1 \le \|f\|_\infty$ teljesül minden f-re. Megmutatjuk, hogy a $\|\cdot\|_\infty$ és $\|\cdot\|_1$ normák mégsem ekvivalensek. Tegyük fel, hogy létezik olyan $M > 0$ konstans, hogy

$$\|f\|_\infty \le M\|f\|_1 \quad \text{teljesül minden } f \in C([0,1],\mathbb{R})\text{-re.} \tag{4.2}$$

Legyen

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx, & x \in [0,1/n], \\ 0, & x \in (1/n,1]. \end{cases}$$

Ekkor f_n minden n-re szakaszonként lineáris és folytonos, ezért $f_n \in C([0,1],\mathbb{R})$. Másrészt

$$\|f_n\|_\infty = f_n(0) = 1 \qquad \text{és} \qquad \|f_n\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\,dx = \int_0^{1/n} 1 - nx\,dx = \left[x - \frac{nx^2}{2}\right]_0^{1/n} = \frac{1}{2n}.$$

Ez ellentmond a (4.2) relációnak, hiszen n tetszőleges nagy lehet, így a két norma nem ekvivalens a $C([0,1],\mathbb{R})$ téren.

Az $\|f\|_1 \le \|f\|_\infty$ becslésből következik, hogy ha a (g_n) függvénysorozat a $\|\cdot\|_\infty$ normában tart egy g függvényhez, akkor a $\|\cdot\|_1$ normában is konvergál g-hez. Fordítva viszont ez általában nem teljesül. Ehhez tekintsük a $g_n(x) = x^n$ függvénysorozatot. Erre $\|g_n - 0\|_1 \to 0$, ha $n \to \infty$, hiszen $\|g_n\|_1 = \int_0^1 x^n\,dx = \frac{1}{n+1} \to 0$, ha $n \to \infty$. Másrészt $\|g_n - 0\|_\infty = 1$ minden n-re, azaz (g_n) nem konvergens a $\|\cdot\|_\infty$ normában. □

4.4. Banach-terek

Valós számokra ismert a következő tétel.

4.46. Tétel (Cauchy-féle konvergenciatétel). *A valós számokból alkotott (x_n) számsorozat akkor és csak akkor konvergens, ha Cauchy-sorozat.*

Megmutatható, hogy véges dimenziós normált terekre átvihető az állítás, de ahogy azt a 4.48. Példában megmutatjuk, végtelen dimenziós esetben egy sorozat lehet Cauchy-sorozat úgy is, hogy az nem konvergens az adott normált térben.

4.47. Tétel. *Legyen $(X, \|\cdot\|)$ egy véges dimenziós normált tér, $(x^{(k)})$ egy X-beli sorozat. Ekkor $(x^{(k)})$ akkor és csak akkor konvergens, ha Cauchy-sorozat.*

Bizonyítás: A 4.21. Tétel szerint X izomorf az $\mathbb{R}^n$ (ill. komplex esetben a $\mathbb{C}^n$) vektortérrel, ezért feltehető, hogy $X = \mathbb{R}^n$. Mivel a 4.40. Tétel szerint bármely norma ekvivalens az $\|\cdot\|_1$ normával, ezért az is feltehető, hogy $\|\cdot\| = \|\cdot\|_1$. Legyen $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})$ egy vektor sorozat. Ekkor viszont bármely $k, m \geq 1$-re és $i = 1, \dots, n$-re

$$|x_i^{(k)} - x_i^{(m)}| \leq \|x^{(k)} - x^{(m)}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_j^{(k)} - x_j^{(m)}|,$$

ezért az $(x^{(k)})$ vektorsorozat akkor és csak akkor Cauchy-sorozat, ha az $(x_i^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ koordináta sorozatok Cauchy-sorozatok minden $i = 1, \dots, n$-re. De ekkor a 4.41. Következményből kapjuk az állítást. □

4.48. Példa. Megmutatjuk, hogy a $(C([-1,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$ normált tér nem teljes, azaz létezik olyan Cauchy-sorozat a térben, amely nem konvergens. Definiáljuk az

$$f_n(t) = \begin{cases} 0, & -1 \leq t < 0, \\ nt, & 0 \leq t \leq 1/n, \\ 1, & 1/n < t \leq 1 \end{cases}$$

függvénysorozatot. Világos, hogy f_n folytonos függvény, így $f_n \in C([-1,1],\mathbb{R})$. Legyen $n > m$, ekkor $1/m > 1/n$. Ezért

$$\begin{aligned} \|f_n - f_m\|_1 &= \int_{-1}^{1} |f_n(t) - f_m(t)|\, dt \\ &= \int_0^{1/n} (n-m)t\, dt + \int_{1/n}^{1/m} (1 - mt)\, dt \\ &= \frac{n-m}{2n^2} + \frac{1}{m} - \frac{1}{n} - \frac{m}{2}\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right) \\ &< \frac{1}{2n} + \frac{1}{m}. \end{aligned}$$

Tehát $\|f_n - f_m\|_1 \to 0$, ha $n, m \to \infty$, azaz (f_n) Cauchy-sorozat az $\|\cdot\|_1$ normában. Definiáljuk az

$$f(t) = \begin{cases} 0, & -1 \leq t \leq 0, \\ 1, & 0 < t \leq 1 \end{cases}$$

függvényt. Nyilván $f_n(t) \to f(t)$ minden $t \in [-1,1]$-re. Másrészt

$$\int_{-1}^{1} |f_n(t) - f(t)|\, dt = \int_0^{1/n} (1 - nt)\, dt = \frac{1}{2n} \to 0,$$

ha $n \to \infty$. Viszont $f \notin C([-1,1],\mathbb{R})$, azaz (f_n) nem konvergens az $\|\cdot\|_1$ normában az adott téren.

Megjegyezzük, hogy ha a $(C([-1,1],\mathbb{R}),\|\cdot\|_1)$ normált tér helyett a $(C([0,1],\mathbb{R}),\|\cdot\|_1)$ normált teret vesszük, és az (f_n) függvénysorozat tagjait megszorítjuk a $[0,1]$ intervallumra, akkor ellenőrizhetjük, hogy a kapott (f_n) sorozat konvergens lesz a $(C([0,1],\mathbb{R}),\|\cdot\|_1)$ normált térben, és a határértéke az azonosan 1 függvény lesz.

Ugyanezen a példán indokolható az is, hogy a $(C([-1,1],\mathbb{R}),\|\cdot\|_2)$ normált tér sem teljes, azaz nem Banach-tér. □

4.49. Definíció. Az X normált teret *teljesnek* nevezzük, ha az X minden Cauchy-sorozatának létezik határértéke X-ben. (Tehát az X tér pontosan akkor teljes, ha érvényes benne a Cauchy-féle konvergenciatétel.) Egy teljes normált teret *Banach-térnek* nevezünk.

4.50. Példa. A 4.47. Tétel szerint az $\mathbb{R}^n$ ill. $\mathbb{C}^n$ halmazon bármely normát tekintve a kapott normált tér teljes, azaz Banach-tér. □

4.51. Példa. A 4.48. Példa alapján látható, hogy a $(C([a,b],\mathbb{R}),\|\cdot\|_1)$ normált tér nem teljes tér, azaz nem Banach-tér. □

4.52. Tétel. *Az* $(C([a,b],\mathbb{R}),\|\cdot\|_\infty)$ *normált tér Banach-tér.*

Bizonyítás: Legyen (f_n) egy Cauchy-sorozat a $(C([a,b],\mathbb{R}),\|\cdot\|_\infty)$ normált térben. Ekkor minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan N, hogy minden $x \in [a,b]$-re

$$|f_n(x) - f_m(x)| \le \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon, \quad \text{ha } n,m > N, \tag{4.3}$$

azaz $(f_n(x))$ egy Cauchy-sorozat. De ekkor $(f_n(x))$ konvergens. Legyen $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, $x \in [a,b]$. Ezért ha $m \to \infty$, akkor a (4.3) egyenlőtlenségből következik, hogy

$$|f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon, \quad \text{ha } n > N,$$

azaz (f_n) egyenletesen konvergál f-hez, és így $f_n \to f$ a $\|\cdot\|_\infty$ normában. □

Megmutatható az alábbi alapvető eredmény:

4.53. Tétel (Riesz–Fischer-tétel). *Az* $(L^p([a,b],\mathbb{R}),\|\cdot\|_p)$ *normált tér Banach-tér minden* $p \ge 1$*-re.*

Megjegyezzük, hogy a Riesz–Fischer-tétel és a 4.51. Példa mutatja a Lebesgue-integrál jelentőségét: Riemann-integrált és például a $\|\cdot\|_1$-es normát használva a folytonos függvények halmazán nem kapunk terjes normált teret, pedig ahogy azt majd később látni fogjuk, ez a norma alapvető fontosságú a függvényterekben.

4.54. Tétel. *Az* $(\ell_p,\|\cdot\|_p)$ *normált tér Banach-tér minden* $p \ge 1$*-re.*

Bizonyítás: Legyen az $x^{(n)} = \left(x_1^{(n)}, \dots, x_i^{(n)}, \dots\right) \in \ell_p$ $(n = 1, 2, \dots)$ sorozat Cauchy-sorozat, azaz bármely $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $N = N(\varepsilon)$, hogy

$$\left\|x^{(n)} - x^{(m)}\right\|_p^p = \sum_{i=1}^{\infty} \left|x_i^{(n)} - x_i^{(m)}\right|^p < \varepsilon^p, \qquad n, m > N. \tag{4.4}$$

Másrészt tetszőleges rögzített j indexre:

$$\left|x_j^{(n)} - x_j^{(m)}\right|^p \le \sum_{i=1}^{\infty} \left|x_i^{(n)} - x_i^{(m)}\right|^p < \varepsilon^p, \qquad n, m > N,$$

és így az $(x_j^{(n)})_{n=1,2\dots}$ valós számsorozat is Cauchy-sorozat, tehát konvergens is. Így minden rögzített j indexre létezik $x_j \in \mathbb{R}$, hogy $x_j = \lim_{n\to\infty} x_j^{(n)}$. Mivel (4.4) alapján

$$\sum_{j=1}^{k} \left|x_j^{(n)} - x_j^{(m)}\right|^p \le \sum_{i=1}^{\infty} \left|x_i^{(n)} - x_i^{(m)}\right|^p < \varepsilon^p, \qquad n, m > N$$

minden $k \ge 1$ egészre, ezért az $m \to \infty$ határátmenettel kapjuk, hogy

$$\sum_{j=1}^{k} \left|x_j^{(n)} - x_j\right|^p = \lim_{m\to\infty} \sum_{j=1}^{k} \left|x_j^{(n)} - x_j^{(m)}\right|^p \le \varepsilon^p, \quad n > N,$$

minden rögzített $k \ge 1$ -re. De ekkor

$$\left\|x^{(n)} - x\right\|_p^p = \sum_{j=1}^{\infty} \left|x_j^{(n)} - x_j\right|^p \le \varepsilon^p, \qquad n > N. \tag{4.5}$$

Mivel $\varepsilon > 0$ tetszőleges volt, ezért $\lim\limits_{n\to\infty} \left\|x^{(n)} - x\right\|_p = 0$, ami azt jelenti, hogy $x^{(n)}$ az ℓ_p normában konvergál x-hez.

Meg kell még mutatnunk, hogy $x \in \ell_p$. (4.5) alapján elegendő nagy n-re $x^{(n)} - x \in \ell_p$, másrészt $x^{(n)} \in \ell_2$, ezért $x = x^{(n)} - \left(x^{(n)} - x\right) \in \ell_p$, ugyanis ℓ_p lineáris tér. □

Egy végtelen dimenziós $(X, \|\cdot\|)$ Banach-tér (x_n) sorozatát *Schauder-bázisnak* nevezzük, ha az $\{x_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ halmaz lineárisan független, és tetszőleges $x \in X$-hez létezik olyan (α_n) skaláris sorozat, hogy

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n.$$

4.55. Példa. Az ℓ_p Banach-térben könnyen belátható, hogy az

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & (1, 0, 0, 0, \dots) \\ x_2 & = & (0, 1, 0, 0, \dots) \\ x_3 & = & (0, 0, 1, 0, \dots) \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

sorozat Schauder-bázist alkot. □

4.5. Metrika, metrikus terek

4.56. Definíció. Legyen X egy adott halmaz. Az X halmazon értelmezett $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ függvényt *távolságnak* vagy *metrikának* nevezzük, ha bármely $x, y, z \in X$-re:

1. $d(x, y) \geq 0$ és $d(x, y) = 0$ akkor és csak akkor, ha $x = y$,
2. $d(x, y) = d(y, x)$,
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (háromszög-egyenlőtlenség).

Az X halmazt *metrikus térnek* nevezzük, ha értelmezve van rajta egy távolság. A metrikus tér jelölése: (X, d).

Érdemes hangsúlyozni, hogy metrikus terek alaphalmaza nem lineáris tér, lehet tetszőleges halmaz is.

4.57. Állítás. *Legyen $(X, \|\cdot\|)$ egy normált tér. Ekkor a $d(x, y) = \|x - y\|$ függvény távolság X-en, azaz minden normált tér egyúttal metrikus tér is.*

Bizonyítás: A távolság 1. és 2. tulajdonsága rögtön következik a norma 1. és 2. tulajdonságából ill. a távolság definíciójából. A 3. pedig a normákra vonatkozó háromszög-egyenlőtlenségből adódik:

$$d(x, y) = \|x - y\| = \|x - z + z - y\| \leq \|x - z\| + \|z - y\| = d(x, z) + d(z, y).$$

□

4.58. Állítás. *Tegyük fel, hogy az X valós (komplex) lineáris téren adott egy d metrika. Ha a d metrika egy normából származtatott, akkor*

$$d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y)$$

teljesül minden $\lambda \in \mathbb{R}$ (ill. $\lambda \in \mathbb{C}$) skaláris számra és minden $x, y \in X$-re.

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy a metrikát a $\|\cdot\|$ normából származtathatjuk. Ekkor

$$d(\lambda x, \lambda y) = \|\lambda x - \lambda y\| = |\lambda| \|x - y\| = |\lambda| d(x, y).$$

□

A 4.57. Állításból és a normákra vonatkozó konvergencia definícióból könnyen látható, hogy a konvergencia fogalma természetes módon kiterjeszthető metrikus terekre:

4.59. Definíció. Legyen (X, d) egy metrikus tér, (x_n) egy X-beli sorozat. Azt mondjuk, hogy az (x_n) sorozat az (X, d) metrikus térben *konvergens*, ha van olyan $x \in X$, hogy bármely $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan N küszöbszám, hogy $d(x_n, x) < \varepsilon$, ha $n > N$; azaz $d(x_n, x) \to 0$, ha $n \to \infty$.

Az (x_n) sorozat az (X, d) metrikus térben *Cauchy-sorozat*, ha bármely $\varepsilon > 0$-hoz van olyan N, hogy $d(x_n, x_m) < \varepsilon$, ha $n, m > N$.

Az (X, d) metrikus tér *teljes*, ha bármely Cauchy-sorozata konvergens.

4.60. Példa. Legyen X tetszőleges halmaz. Tetszőleges $x, y \in X$-re definiáljuk a d függvényt a következő módon:

$$d\colon X \times X \to \mathbb{R}, \qquad d(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \neq y, \\ 0, & \text{ha } x = y. \end{cases}$$

Ez könnyen ellenőrizhetően teljesíti a metrika 3 tulajdonságát. Ezt a metrikát *triviális metrikának* nevezzük.

Egy (x_n) sorozat akkor és csak akkor konvergál x-hez a triviális metrikában, ha létezik olyan N küszöbszám, hogy $x_n = x$ minden $n > N$-re, hiszen egyébként $d(x_n, x) = 1$ lenne tetszőleges nagy n-re. □

4.61. Példa. Legyen X a 0 és 1 elemekből álló (bináris) sorozatoknak a halmaza, amelyekben tetszőleges sok, de legfeljebb véges sok 1-es lehet. Ekkor legyen $d(x, y)$ az x és y sorozatokban az azonos indexű, eltérő számjegyek száma. Például

$$\begin{aligned} x &= (0,0,1,0,1,1,1,0,0,0,0,0,0,\ldots) \\ y &= (1,1,1,0,1,0,1,0,0,1,0,0,0,\ldots) \end{aligned}$$

esetén $d(x, y) = 4$. Világos, hogy d metrika. □

4.62. Példa. Legyen $\mathbb{R}^\infty$ a végtelen valós értékű sorozatok halmaza.

Tetszőleges $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ és $y = (y_1, \ldots, y_n, \ldots)$ sorozatokra X-ből legyen

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|x_i - y_i|}{1 + |x_i - y_i|}.$$

Világos, hogy $0 \le d(x, y) \le \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} - 1 = 2 - 1 = 1$, és $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$. Nyilván $d(x, y) = d(y, x)$ is teljesül. A háromszög-egyenlőtlenség ellenőrzéséhez meg kell mutatni, hogy

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|x_i - y_i|}{1 + |x_i - y_i|} \le \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|x_i - z_i|}{1 + |x_i - z_i|} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|z_i - y_i|}{1 + |z_i - y_i|} = d(x, z) + d(z, y).$$

Ez abból következik, hogy az $\frac{u}{1+u}$ függvény monoton növekvő $u > 0$-ra, és $|x_i - y_i| \le |x_i - z_i| + |z_i - y_i|$, és ezért

$$\begin{aligned} \frac{|x_i - y_i|}{1 + |x_i - y_i|} &\le \frac{|x_i - z_i| + |z_i - y_i|}{1 + |x_i - z_i| + |z_i - y_i|} \\ &= \frac{|x_i - z_i|}{1 + |x_i - z_i| + |z_i - y_i|} + \frac{|z_i - y_i|}{1 + |x_i - z_i| + |z_i - y_i|} \\ &\le \frac{|x_i - z_i|}{1 + |x_i - z_i|} + \frac{|z_i - y_i|}{1 + |z_i - y_i|}. \end{aligned}$$

Megmutattuk tehát, hogy (X, d) metrikus tér. Másrészt bármely $x \ne y$ sorozatra és $\lambda \in \mathbb{R}$ számra $|\lambda| \ne 1$ esetén

$$d(\lambda x, \lambda y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|\lambda|\,|x_i - y_i|}{1 + |\lambda|\,|x_i - y_i|} \ne |\lambda| \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|x_i - y_i|}{1 + |x_i - y_i|} = |\lambda| d(x, y),$$

így a 4.57. Állítás szerint d nem származtatható normából, azaz nem definiálható a téren olyan norma, hogy $d(x, y) = \|x - y\|$ lenne.

Ha az $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ sorozatban az x_n elemek csak binárisak (x_n értéke 0 vagy 1) lehetnek, akkor

$$\frac{|x_i - y_i|}{1 + |x_i - y_i|} = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x_i = y_i \\ \frac{1}{2}, & \text{ha} \quad x_i \ne y_i \end{cases}$$

így $d(x,y)$-ból pontosan megmondható az eltérés oka és az is, hogy az x és y melyik komponenseiben tér el egymástól, továbbá

$$0 \leq d(x,y) \leq \frac{1}{2}.$$

Ezért ez a metrika előnyös például átviteli hiba javításánál. □

Egy (X,d) metrikus tér A részhalmazának *lezártján* azt az $[A]$ halmazt értjük, amely az A-beli konvergens sorozatok határértékeit tartalmazza. Ezzel ekvivalens az a megfogalmazás, hogy $x \in [A]$, ha bármely $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan $a \in A$, hogy $d(x,a) < \varepsilon$. Nyilván $A \subset [A]$, és ellenőrizhető, hogy $[A]$ zárt halmaz.

Megmutatható, hogy bármely nem teljes metrikus tér beágyazható (lényegében egyértelmű módon) egy teljes metrikus térbe:

4.63. Tétel. *Legyen (X,d) egy nem teljes metrikus tér. Ekkor létezik egy olyan (X^*,d^*) metrikus tér és egy $T\colon X \to X^*$ operátor, amelyre*

1. *(X^*,d^*) teljes metrikus tér,*
2. *T izometria, azaz $d(x,y) = d^*(Tx,Ty)$ minden $x,y \in X$-re,*
3. *$[T(X)] = X^*$, ahol $T(X) = \{T(x)\colon x \in X\}$.*

Az X^* kiterjesztése X-nek izometriától eltekintve egyértelmű, azaz ha is (X',d') teljesíti a fenti tulajdonságokat, akkor (X',d') és (X^*,d^*) izometrikus, azaz létezik $S : (X^*,d^*) \to (X',d')$ ráképezés, amely izometria is.

A fenti tétel által meghatározott (X^*,d^*) kiterjesztést az (X,d) (nem teljes) metrikus tér *teljes burkának* hívjuk.

4.64. Példa. A $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ racionális számok normált tere nem teljes, hiszen irracionális számhoz konvergáló racionális sorozatoknak nincs határértéke a racionális számok terében. A tér teljes burka az $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ tér. Másként fogalmazva, $\mathbb{Q}$ lezártja $\mathbb{R}$. □

4.65. Példa. A 4.48. Példában láttuk, hogy a $(C([a,b],\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$ normált tér nem teljes. Megmutatható, hogy a lezártja az $(L^1([a,b],\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$ Banach-tér. □

4.6. Pre-Hilbert-terek

4.66. Definíció. Legyen X egy komplex lineáris tér. Az $X \times X \to \mathbb{C}$ leképezést, amelyet $\langle\cdot,\cdot\rangle$-vel jelölünk, *(komplex) skaláris szorzatnak* (vagy *belső szorzatnak*) nevezzük, ha

1. bármely $x \in X$-re, $\langle x,x\rangle \geq 0$, és $\langle x,x\rangle = 0$ akkor és csak akkor teljesül, ha $x = 0$;
2. bármely $x,y \in X$-re $\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}$ (ahol $\overline{\langle y,x\rangle}$ az $\langle y,x\rangle$ komplex szám konjugáltját jelöli);
3. bármely α,β (komplex) skaláris számokra és $x,y,z \in X$ esetén $\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha\langle x,z\rangle + \beta\langle y,z\rangle$.

Egy X valós lineáris téren értelmezett *valós skaláris szorzaton* egy olyan $X \times X \to \mathbb{R}$ leképezést értünk, amely a fenti tulajdonságokkal rendelkezik.

Az X komplex (valós) lineáris teret *pre-Hilbert-térnek* vagy *euklideszi-térnek* nevezzük, ha az X-en értelmezve van egy komplex (valós) skaláris szorzat.

4.67. Megjegyzés.

1. Egy X valós lineáris téren értelmezett (valós) skaláris szorzatra a fenti definícióban szereplő 2. tulajdonság egyszerűen csak azt követeli meg, hogy $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$ legyen minden $x, y \in X$-re, azaz a valós skaláris szorzat szimmetrikus.

2. Ha X valós lineáris tér, akkor az előző megjegyzés és a skaláris szorzat 3. tulajdonsága alapján a skaláris szorzat lineáris a 2. komponensében is, azaz
$$\langle z, \alpha x + \beta y\rangle = \alpha\langle z, x\rangle + \beta\langle z, y\rangle, \qquad x, y, z \in X, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

3. Ha X komplex lineáris tér, akkor a (komplex) skaláris szorzat additív a második komponensében, hiszen
$$\langle x, y + z\rangle = \overline{\langle y + z, x\rangle} = \overline{\langle y, x\rangle + \langle z, x\rangle} = \overline{\langle y, x\rangle} + \overline{\langle z, x\rangle} = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle.$$

4. Ha X komplex lineáris tér, akkor
$$\langle x, \lambda y\rangle = \overline{\langle \lambda y, x\rangle} = \overline{\lambda\langle y, x\rangle} = \overline{\lambda} \cdot \overline{\langle y, x\rangle} = \overline{\lambda}\langle x, y\rangle$$
minden $x, y \in X$-re és $\lambda \in \mathbb{C}$-re.

5. Minden $x \in X$-re $\langle x, 0\rangle = 0$, hiszen a 2. tulajdonság szerint $\langle x, 0\rangle = \langle x, 0 + 0\rangle = \langle x, 0\rangle + \langle x, 0\rangle$.

A skaláris szorzás néhány tulajdonsága:

4.68. Tétel (Cauchy–Bunyakovszkij–Schwartz). *Ha X pre-Hilbert-tér, akkor*
$$|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle, \qquad x, y \in X.$$

Bizonyítás: Ha $y = 0$, akkor $\langle x, y\rangle = 0$, és ezért a kívánt egyenlőtlenség teljesül.
Legyen $y \neq 0$. Tetszőleges $\lambda \in \mathbb{C}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$)-re
$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle x - \lambda y,\ x - \lambda y\rangle \\ &= \langle x, x\rangle + \langle -\lambda y, x\rangle + \langle x, -\lambda y\rangle + \langle -\lambda y, -\lambda y\rangle \\ &= \langle x, x\rangle - \langle \lambda y, x\rangle + \overline{\langle -\lambda y, x\rangle} - \lambda\langle y, -\lambda y\rangle \\ &= \langle x, x\rangle - \lambda\langle y, x\rangle - \overline{\lambda\langle y, x\rangle} - \lambda\overline{\langle -\lambda y, y\rangle} \\ &= \langle x, x\rangle - 2\operatorname{Re}(\lambda\langle y, x\rangle) + |\lambda|^2\langle y, y\rangle. \end{aligned}$$
Legyen $\lambda = \frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}$ azaz $\lambda = \overline{\frac{\langle y,x\rangle}{\langle y,y\rangle}}$. Ekkor $0 \leq \langle x, x\rangle - \frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\langle y,y\rangle}$, amiből a kívánt egyenlőtlenség következik. □

4.69. Tétel. *Egy tetszőleges X pre-Hilbert-téren az*
$$\|\cdot\|\colon X \to \mathbb{R}, \qquad \|x\| \stackrel{\text{def}}{=} \langle x, x\rangle^{1/2}$$
leképezés norma.

Bizonyítás: $\|x\| \geq 0$ teljesül. Ha $\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2} = 0$, akkor $x = 0$ a skaláris szorzat tulajdonsága miatt. Legyen $\lambda \in \mathbb{C}$ (ill. $\lambda \in \mathbb{R}$). Ekkor

$$\|\lambda x\|^2 = \langle \lambda x, \lambda x\rangle = \lambda \langle x, \lambda x\rangle = \lambda \overline{\langle \lambda x, x\rangle} = \lambda \overline{\lambda \langle x, x\rangle} = \lambda \cdot \overline{\lambda} \langle x, x\rangle = |\lambda|^2 \langle x, x\rangle = |\lambda|^2 \|x\|^2,$$

azaz $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ teljesül. Végül tekintsük

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle = \langle x, x\rangle + 2\,\mathrm{Re}\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle.$$

Mivel $\mathrm{Re}\langle x, y\rangle \leq |\langle x, y\rangle|$, ezért a Cauchy–Bunyakovszkij–Schwartz-egyenlőtlenség szerint bármely $x, y \in X$-re

$$\|x + y\|^2 \leq \langle x, x\rangle + 2\sqrt{\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle} + \langle y, y\rangle = (\|x\| + \|y\|)^2,$$

és így a háromszög-egyenlőtlenség is teljesül. Tehát minden pre-Hilbert-tér normált tér is. □

A fenti norma jelölését használva a Cauchy–Bunyakovszkij–Schwartz-egyenlőtlenség a következő alakban írható:

4.70. Következmény. *Egy tetszőleges X pre-Hilbert-térben*

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|, \qquad x, y \in X.$$

4.71. Példa. Tekintsük a valós n-dimenziós vektorok $\mathbb{R}^n$ lineáris terét, legyen $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Lineáris algebrából és analízisből is ismert, hogy az

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \tag{4.6}$$

képlet skaláris szorzatot definiál $\mathbb{R}^n$-n. A skaláris szorzat által definiált norma az euklideszi-norma: $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$. □

4.72. Példa. Tekintsük a $\mathbb{C}^n$ lineáris teret, a komplex szám-n-esek halmazát. Legyen $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{C}^n$. Könnyen látható, hogy a (4.6) képlet nem komplex skaláris szorzat, mivel például általában $\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ nem valós szám. A (4.6) képletet módosítjuk, legyen

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}.$$

Ellenőrizhető, hogy ez már teljesíti a komplex skaláris szorzatot definiáló mindhárom tulajdonságot. Az általa generált norma: $\|x\|_2 = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^2}$. □

4.73. Példa. Tekintsük a $C([a, b], \mathbb{R})$ az $[a, b]$ intervallumon folytonos valós értékű függvények halmazát. Tetszőleges f és g függvényekre $C([a, b], \mathbb{R})$-ből, legyen

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx. \tag{4.7}$$

Megmutatjuk, hogy a fenti kifejezés skaláris szorzat $C([a,b],\mathbb{R})$-n. Világos, hogy $\langle f,f\rangle = \int_a^b f^2(x)\,dx \geq 0$, és ha $\langle f,f\rangle = 0$, akkor $f=0$, hiszen ha egy nemnegatív folytonos függvény egy pontban pozitív, akkor az integrálja is pozitív.

Az $\langle f,g\rangle = \langle g,f\rangle$ összefüggés a definícióból nyilván következik.

Végül az

$$\langle \alpha f+\beta g,h\rangle = \int_a^b (\alpha f(x)+\beta g(x))\,h(x)\,dx = \alpha\,\langle f,h\rangle + \beta\,\langle g,h\rangle\,, \quad \alpha,\beta\in\mathbb{R},\ f,g,h\in C([a,b],\mathbb{R})$$

összefüggés az integrál linearitásából következik. □

4.74. Példa. Tekintsük a $C([a,b],\mathbb{C})$ lineáris teret, az $[a,b]$ intervallumon folytonos komplex értékű függvények halmazát. A $\mathbb{C}^n$ tér skaláris szorzatához hasonlóan kapjuk, hogy a (4.7) képletet módosítva, az

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\,dx, \qquad f,g\in C([a,b],\mathbb{C}) \tag{4.8}$$

skaláris szorzatot definiál. A skaláris szorzat által definiált norma

$$\|f\|_2 = \langle f,f\rangle^{1/2} = \left(\int_a^b |f(x)|^2\,dx\right)^{1/2}, \qquad f\in C([a,b],\mathbb{C}).$$

□

4.75. Példa. Az előző példához hasonló módon tekintsük az $L_2([a,b],\mathbb{C})$ lineáris teret, az $[a,b]$ intervallumon értelmezett olyan komplex értékű és Lebesgue-mérhető f függvények halmazát, amelyekre $\int_a^b |f|^2\,dm < \infty$. Legyen $f,g\in L_2([a,b],\mathbb{C})$. Ekkor $\bar g$ és $f\cdot\bar g$ is Lebesgue-mérhető, továbbá

$$|f(x)\overline{g(x)}| \leq \frac{1}{2}\left(|f(x)|^2+|g(x)|^2\right).$$

Ezért

$$\int_a^b |f\cdot\overline{g}|\,dm \leq \frac{1}{2}\left(\int_a^b |f|^2\,dm + \int_a^b |g|^2\,dm\right) < \infty,$$

azaz $f\cdot\bar g\in L_2([a,b],\mathbb{C})$.

Az $L_2([a,b],\mathbb{C})$ téren is a (4.8) képlethez hasonlóan

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b f\cdot\overline{g}\,dm, \qquad f,g\in L_2([a,b],\mathbb{C})$$

nyilván skaláris szorzat, és az általa definiált norma $\|f\|_2 = \langle f,f\rangle^{1/2} = \left(\int_a^b |f|^2\,dm\right)^{1/2}$. □

4.76. Példa. Tekintsük a komplex ℓ_2 lineáris teret, azaz azon komplex elemű $(a_1,\ldots,a_n,\ldots)$ sorozatoknak a halmazát, amelyekre $\sum\limits_{i=1}^{\infty}|a_i|^2<\infty$. Legyen $a=(a_i)$, $b=(b_i)\in\ell_2$. Ekkor legyen

$$\langle a,b\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} a_i\overline{b_i}.$$

Mivel $\left|a_i\overline{b_i}\right| \leq \frac{1}{2}\left|a_i\right|^2 + \frac{1}{2}\left|b_i\right|^2$, ezért $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\left|a_i\overline{b_i}\right| \leq \frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{\infty}\left|a_i\right|^2 + \frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{\infty}\left|b_i\right|^2 < \infty$, tehát az

$$(a,b) \longmapsto \langle a,b\rangle$$

hozzárendelés $\ell_2 \times \ell_2$-t a $\mathbb{C}$-be képezi le. Könnyen ellenőrizhető, hogy ez a képlet egy skaláris szorzatot definiál ℓ_2-n, az általa generált norma pedig $\|a\|_2 = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{\infty}\left|a_i\right|^2}$. □

4.77. Tétel. *A skaláris szorzat folytonos, azaz*

$$\langle x_n, y_n\rangle \to \langle x,y\rangle\,, \qquad ha \quad x_n \to x,\ y_n \to y.$$

Bizonyítás: Legyen $x_n \to x,\ y_n \to y$, azaz $\|x_n - x\| \to 0$ és $\|y_n - y\| \to 0$, ha $n \to \infty$. Ekkor

$$\begin{aligned}
|\langle x_n, y_n\rangle - \langle x,y\rangle| &= |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y_n\rangle + \langle x, y_n\rangle - \langle x,y\rangle| \\
&= |\langle x_n - x, y_n\rangle + \langle x, y_n - y\rangle| \\
&\leq |\langle x_n - x, y_n\rangle| + |\langle x, y_n - y\rangle| \\
&\leq \|x_n - x\|\cdot\|y_n\| + \|x\|\|y_n - y\| \\
&\to 0, \qquad n \to +\infty.
\end{aligned}$$

□

4.78. Tétel (Paralelogramma-egyenlőség). *Ha X pre-Hilbert-tér, akkor a skaláris szorzattal definiált normára*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2\,, \qquad x,y \in X.$$

Bizonyítás:

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle + \langle x-y, x-y\rangle \\
&= \langle x,x\rangle + \langle y,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle + \langle x,x\rangle - \langle y,x\rangle - \langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle \\
&= 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2\,.
\end{aligned}$$

□

Az előző állítás alapján ellenőrizhető, hogy egy normált téren definiálható-e olyan skaláris szorzat, amely az adott normát állítja elő.

4.79. Példa. Tekintsük az $L_1([0,1],\mathbb{R})$ lineáris teret az $\|f\|_1 = \int_0^1 |f|\,dm$ normával. Legyen

$$f\colon [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1/2, \\ 0, & 1/2 < x \leq 1 \end{cases}$$

és

$$g\colon [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad g(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1/2, \\ 1, & 1/2 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Világos, hogy

$$(f+g)(x) = 1, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad \text{és} \quad (f-g)(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1/2 \\ 0, & x = 1/2 \\ -1, & 1/2 < x \leq 1. \end{cases}$$

Így

$$\|f+g\|_1 = 1; \qquad \|f\|_1 = \frac{1}{2}; \qquad \|g\|_1 = \frac{1}{2}; \qquad \|f-g\|_1 = \int_0^1 |f-g|\, dm = 1.$$

Tehát

$$2 = \|f+g\|_1^2 + \|f-g\|_1^2 \neq 2\,\|f\|_1^2 + 2\,\|g\|_1^2 = 1,$$

és így a paralelogramma egyenlőség nem teljesül. Következésképpen az L_1 norma nem származhat skaláris szorzatból. □

Az előző példához hasonló módon megmutatható, hogy az ℓ_p és $L_p([a,b],\mathbb{R})$ Banach-terek $p \neq 2$-re nem pre-Hilbert-terek.

4.7. Ortogonális és maximális ortonormált rendszerek pre-Hilbert-terekben

4.80. Definíció. Legyen X pre-Hilbert-tér, $x, y \in X$. Azt mondjuk, hogy x *ortogonális* (merőleges) y-ra (jelölés $x \perp y$) ha $\langle x, y\rangle = 0$. Azt mondjuk, hogy egy x vektor merőleges az $A \subset X$ halmazra ($x \perp A$), ha $x \perp y$ minden $y \in A$-ra.

4.81. Állítás. *Legyen X komplex (valós) pre-Hilbert-tér.*

1. *Ha $x \perp y$, akkor $y \perp x$.*
2. *Legyen $A = \{\alpha x + \beta y \colon \alpha, \beta \in \mathbb{C}\}$ (ill. $A = \{\alpha x + \beta y \colon \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$). Ha $z \perp x$ és $z \perp y$, akkor $z \perp A$.*

Bizonyítás: Az 1. állítás triviálisan teljesül a skaláris szorzat 2. tulajdonságából.
A 2. állítás következik az

$$\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha\langle x, z\rangle + \beta\langle y, z\rangle = 0$$

összefüggésből. □

4.82. Tétel (Pitagorasz). *Egy pre-Hilbert-térben ha $x \perp y$, akkor a skaláris szorzat általt generált normában*

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 .$$

Bizonyítás:

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle y, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 .$$

□

4.83. Definíció. Legyen X egy pre-Hilbert-tér és tekintsük az X egy S részhalmazát. Azt mondjuk, hogy S *ortogonális rendszer*, ha S elemei páronként ortogonálisak, azaz bármely különböző $x, y \in S$-re $x \perp y$. Ha az S elemei ortogonálisak, és $\|x\| = 1$ minden $x \in S$-re, akkor azt mondjuk hogy S *ortonormált rendszer* (vagy ortonormált vektorok halmaza).

4.84. Tétel. *Legyen X pre-Hilbert-tér és legyen S egy ortonormált rendszer X -ben, amelynek a nulla vektor nem eleme. Ekkor S lineárisan független halmaz.*

Bizonyítás: Legyen $x_1, \ldots, x_k \in S$ tetszőleges véges sok eleme az S halmaznak. Legyen $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{C}$ (ill. $\mathbb{R}$). Ekkor

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_k x_k = 0$$

esetén igaz, hogy

$$\langle \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_k x_k, x_i \rangle = 0, \qquad i = 1, \ldots, k.$$

Tehát

$$\alpha_1 \langle x_1, x_i \rangle + \alpha_2 \langle x_2, x_i \rangle + \cdots + \alpha_k \langle x_k, x_i \rangle = 0, \qquad i = 1, \ldots, k.$$

Legyen $i = 1$. Ekkor

$$\alpha_1 \langle x_1, x_i \rangle = 0 \quad \text{ugyanis} \quad \langle x_j, x_1 \rangle = 0, \qquad j \neq 1.$$

Ebből következik, hogy $\alpha_1 = 0$. Hasonlóan $\alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$.

Tehát $(x_1, \ldots, x_k)$ lineárisan független vektorok. Ez pedig azt jelenti, hogy az S vektorhalmaz bármely véges sok vektora független, és így S is független vektorrendszer. □

4.85. Megjegyzés. A lineáris algebrából ismert Gram–Schmidt-eljárással bármely n elemszámú lineárisan független vektorhoz kiválasztható olyan n db ortonormált vektor, hogy a két vektorrendszer ugyanazt a teret feszíti ki.

4.86. Definíció. Legyen A egy ortonormált halmaz az X pre-Hilbert-térben. Azt mondjuk, hogy az A ortonormált halmaz *maximális (teljes)*, ha nincs másik olyan A-tól különböző ortonormált halmaz, amely tartalmazza A-t.

Megmutatható a következő eredmény:

4.87. Tétel. *Legyen X egy pre-Hilbert-tér nem triviális (azaz X-nek a zéró elemen kívül más eleme is van). Ekkor*

1. *Létezik (valójában több is) maximális ortonormált halmaz X-ben.*
2. *Bármely ortonormált halmaz kiterjeszthető maximális ortonormált halmazzá X-ben.*

A maximális halmazrendszer fogalma ekvivalens a következő tulajdonsággal:

4.88. Állítás. *Legyen A ortonormált halmaz az X pre-Hilbert-térben. Az A halmaz akkor és csak akkor maximális, ha bármely $x \in X$ elemre $x \perp A$-ból következik, hogy x zéró eleme X-nek.*

Bizonyítás:

Legyen A maximális, és tegyük fel, hogy van olyan $x \neq 0$ eleme X-nek, amelyre $x \perp A$. Ekkor

$$A \cup \left\{ \frac{x}{\|x\|} \right\}$$

szintén ortonormált rendszer, amelynek A valódi részhalmaza. Ez ellentmond annak, hogy A maximális ortonormált halmaz.

Fordítva tegyük fel, hogy A olyan, hogy $x \perp A$-ból következik, hogy $x = 0$. Ha ekkor A nem a maximális lenne, akkor volna olyan $B \subset X$ halmaz, hogy B maximális és A valódi részhalmaza B-nek. Így van olyan $y \in B$, hogy $y \notin A$. Továbbá $y \perp A$, és így a feltétel szerint $y = 0$, ami ellentmondás. □

4.8. Hilbert-terek

Legyen X pre-Hilbert-tér a $\langle\cdot,\cdot\rangle$ skaláris szorzattal, $\|\cdot\|$ a skaláris szorzat által generált norma.

A pre-Hilbert-terek között kiemelkedő fontosságúak azok a terek, amelyek teljes normált terek is.

4.89. Definíció. Legyen (x_n) egy sorozat az X pre-Hilbert-térben. Azt mondjuk, hogy (x_n) *Cauchy-sorozat*, ha bármely $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $N = N(\varepsilon)$, hogy

$$\|x_n - x_m\| = \sqrt{\langle x_n - x_m, x_n - x_m\rangle} < \varepsilon,$$

ha $n, m > N$.

Azt mondjuk, hogy az X pre-Hilbert-tér *Hilbert-tér*, ha X a rajta értelmezett skaláris szorzat által generált norma szerint teljes, azaz egy sorozat akkor és csak akkor konvergens, ha Cauchy-sorozat.

A következő központi jelentőségű tételt bizonyítás nélkül közöljük:

4.90. Tétel. *Legyen Λ egy index halmaz, $A = \{x_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ egy ortonormált halmaz az X Hilbert-térben. Ekkor a következő álllítások ekvivalensek:*

1. *A maximális ortonormál rendszer X-ben.*
2. *Bármely $x \in X$-re, $x \perp A$ akkor és csak akkor teljesül, ha $x = 0$.*
3. *Bármely $x \in X$-re $x = \sum\limits_{\alpha\in\Lambda} \langle x, x_\alpha\rangle\, x_\alpha$.*
4. *Az A halmaz által generált altér lezártja maga az X Hilbert-tér.*
5. *$\|x\|^2 = \sum\limits_{\alpha\in\Lambda} |\langle x, x_\alpha\rangle|^2$ bármely $x \in X$-re. Ezt az összefüggést* Parseval-azonosságnak *nevezzük.*
6. *Tetszőleges $x, y \in X$ elemekre $\langle x, y\rangle = \sum\limits_{\alpha\in\Lambda} \langle x, x_\alpha\rangle \langle x_\alpha, y\rangle$.*

Az $\langle x, x_\alpha\rangle$ $(\alpha \in \Lambda)$ skaláris mennyiségeket az x vektor *általánosított Fourier-együtthatóinak* vagy csak egyszerűen *Fourier-együtthatóinak* nevezzük.

Ha Λ a fenti tételben megszámlálható, akkor az A halmaz a tétel 3. pontja értelmében egyben Schauder-bázis a térben.

4.91. Példa. A 4.50. Példa szerint az $\mathbb{R}^n$ és $\mathbb{C}^n$ pre-Hilbert-terek teljesek, azaz Hilbert-terek. □

A 4.54. Tételből rögtön következik:

4.92. Tétel. *Az ℓ_2 tér teljes, azaz Hilbert-tér.*

Most megadunk egy ortonormált rendszert ℓ_2-ben. Legyen

$$\begin{array}{rcl} e_1 & = & (1,0,0,0,\dots) \\ e_2 & = & (0,1,0,0,\dots) \\ e_3 & = & (0,0,1,0,\dots) \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

4.93. Állítás. *Az $S = \{e_1, e_2, \dots, e_n, \dots\}$ vektorrendszer maximális ortonormált halmaz ℓ_2-ben.*

Bizonyítás: Nyilván

$$\langle e_i, e_i \rangle = 1 \qquad \text{és} \qquad \langle e_i, e_j \rangle = 0, \qquad i \neq j,$$

azaz S ortonormált rendszer.

Legyen $x = (x_1, \dots, x_n, \dots) \in \ell_2$, olyan vektor, amely merőleges S-re. De ekkor $0 = \langle x, e_i \rangle = x_i$ minden $i = 1, 2, \dots$-re, tehát x a zéró vektor. Ezért a 4.90. Tétel szerint S maximális ortonormált halmaz ℓ_2-ben. □

A 4.53. Tételt $p = 2$-re alkalmazva kapjuk:

4.94. Tétel. *Az $L_2([a, b], \mathbb{C})$ tér Hilbert-tér.*

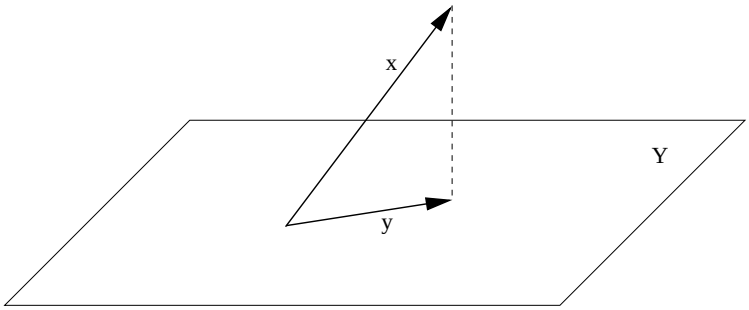
4.9. Egy minimum probléma

Legyen adott egy X komplex pre-Hilbert-tér, a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ slakáris szorzattal, $\| \cdot \|$ a skaláris szorzat által definiált norma.

Legyen Y egy altér X-ben, $x \notin Y$. Azt mondjuk, hogy az $y \in Y$ vektor az x vektor *legjobb közelítése Y-ban*, ha

$$\|x - y\| \leq \|x - z\|, \qquad z \in Y.$$

Más szóval y minimalizálja a $\min\limits_{z \in Y} \|x - z\|$ kifejezést. Az y vektort az x vektor Y altérre vonatkozó *vetületének* is nevezzük.



4.95. Tétel. *Legyen X egy pre-Hilbert-tér, Y egy altér X-ben, $x \notin Y$. Ekkor y akkor és csak akkor az x legjobb közelítése az Y altérben, ha $x - y$ ortogonális az Y altérre.*

Bizonyítás: 1. Tegyük fel, hogy y az x legjobb közelítése az Y altérben. Rögzítsünk egy tetszőleges $z \neq 0$ vektort Y-ban. Legyen

$$\alpha = \frac{\langle x - y, z \rangle}{\langle z, z \rangle},$$

és tekintsük az $y + \alpha z \in Y$ vektort. Erre y minimum tulajdonsága és α definíciója miatt teljesül

$$\begin{aligned}
\|x - y\|^2 &= \langle x - y, x - y \rangle \\
&\leq \langle x - y - \alpha z, x - y - \alpha z \rangle \\
&= \langle x - y, x - y \rangle - \alpha \langle z, x - y \rangle - \bar{\alpha} \langle x - y, z \rangle + |\alpha|^2 \langle z, z \rangle \\
&= \|x - y\|^2 - 2 \operatorname{Re}(\alpha \langle z, x - y \rangle) + |\alpha|^2 \langle z, z \rangle \\
&= \|x - y\|^2 - 2 \operatorname{Re}\left(\frac{\langle x - y, z \rangle}{\langle z, z \rangle} \langle z, x - y \rangle \right) + \frac{|\langle x - y, z \rangle|^2}{(\langle z, z \rangle)^2} \langle z, z \rangle \\
&= \|x - y\|^2 - \frac{|\langle x - y, z \rangle|^2}{\langle z, z \rangle}.
\end{aligned}$$

Ebből következik, hogy $\langle x-y, z\rangle = 0$, azaz $x-y$ merőleges Y-ra.

2. Tegyük fel, hogy $\langle x-y, z\rangle = 0$ minden $z \in Y$-ra. Legyen $w \in Y$ rögzített. Ekkor $y - w \in Y$, ezért $\langle x-y, y-w\rangle = 0$. Így a Pitagorasz-tétel szerint

$$\|x-y+y-w\|^2 = \|x-y\|^2 + \|y-w\|^2,$$

azaz $\|x-y\| < \|x-w\|$ akkor és csak akkor, ha $y \neq w$. □

Egydimenziós alteret tekintve a tételből következik rögtön az alábbi eredmény:

4.96. Állítás. *Legyen X komplex pre-Hilbert-tér, $a, b \in X$, $b \neq 0$. Ekkor*

1. *$\lambda \in \mathbb{C}$ akkor és csak akkor minimalizálja az $\|a-\lambda b\|_2$ kifejezést, ha $\langle a-\lambda b, b\rangle = 0$, azaz $a - \lambda b$ ortogonális b-re.*
2. *$\lambda \in \mathbb{C}$ pontosan akkor minimalizálja az $\|a-\lambda b\|_2$ kifejezést, ha*

$$\lambda = \frac{\langle a, b\rangle}{\langle b, b\rangle}.$$

Speciális esetekben kapjuk az alábbi állításokat:

4.97. Állítás. *Legyen $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{C}^n$. Ekkor*

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k - \lambda y_k|^2$$

értéke pontosan akkor minimális, ha

$$\lambda = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k \overline{y}_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} |y_k|^2}.$$

4.98. Állítás. *Legyen $f, g \in L_2([a,b], \mathbb{C})$, $g \neq 0$. Ekkor az*

$$\int_a^b |f(t) - \lambda g(t)|^2 \, dt$$

érték pontosan akkor minimális, ha

$$\lambda = \frac{\int_a^b f(t)\overline{g(t)}\, dt}{\int_a^b |g(t)|^2 \, dt}.$$

Véges dimenziós Y altérre a következő eredmény adódik a 4.97. Tételből:

4.99. Tétel. *Legyen X egy pre-Hilbert-tér, Y n-dimenziós altér X-ben, amelynek $y_1, \dots, y_n$ egy bázisa. Legyen $x \notin Y$. Ekkor*

$$y = \alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_n y_n$$

akkor és csak akkor az x legjobb közelítése az Y altérben, ha az $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ skalárok teljesítik az

$$\begin{array}{ccccccccc} \langle y_1, y_1\rangle\alpha_1 & + & \langle y_2, y_1\rangle\alpha_2 & + & \cdots & + & \langle y_n, y_1\rangle\alpha_n & = & \langle x, y_1\rangle \\ \langle y_1, y_2\rangle\alpha_1 & + & \langle y_2, y_2\rangle\alpha_2 & + & \cdots & + & \langle y_n, y_2\rangle\alpha_n & = & \langle x, y_2\rangle \\ \vdots & & & & & & & & \vdots \\ \langle y_1, y_n\rangle\alpha_1 & + & \langle y_2, y_n\rangle\alpha_2 & + & \cdots & + & \langle y_n, y_n\rangle\alpha_n & = & \langle x, y_n\rangle \end{array} \tag{4.9}$$

ún. normálegyenleteket.

Bizonyítás: A 4.97. Tétel szerint y akkor és csak akkor a legjobb közelítése x-nek, ha

$$\langle x - (\alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_n y_n), y_j\rangle = 0$$

minden $j = 1, \dots, n$-re. Ezt átrendezve kapjuk a (4.9) egyenleteket. □

Ha Y bázisa ortonormált, akkor a fenti eredményből rögtön kapjuk az alábbi következményt.

4.100. Következmény. *Legyen X egy pre-Hilbert-tér, Y egy n-dimenziós altér X-ben, amelynek $y_1, \dots, y_n$ egy ortonormált bázisa. Legyen $x \notin Y$. Ekkor*

$$y = \alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_n y_n$$

akkor és csak akkor az x legjobb közelítése az Y altérben, ha

$$\alpha_j = \langle x, y_j\rangle, \qquad j = 1, \dots, n.$$

Kaptuk tehát, hogy ha Y egy maximális ortonormált rendszer véges sok eleme által generált altér egy X Hilbert-térben, akkor x legjobb közelítésének együtthatói az x Fourier-együtthatói.