MA1344i - 8. gyakorló feladatsor

1. Algebrák-e az alábbiak?

   (a) $(\mathbb{N}, *)$, ahol $x * y = xy - x + y$;

   (b) $(\mathbb{N}_0, *)$, ahol $x * y = xy - x + y$;

   (c) $(A, \circ)$, ahol $A = \{m + n\sqrt{2}\colon\ n, m \in \mathbb{Z}\}$ és $x \circ y = x^2 + y\sqrt{2}$;

   (d) $(A, \cap)$, ahol $A = \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$;

   (e) $(A, \cup)$, ahol $A = \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$.

2. Írja fel az alábbi algebrák művelettáblázatait!

   (a) $(\mathbb{Z}_5, \oplus)$, ahol $\mathbb{Z}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ és $m \oplus n$ egyenlő az $m + n$ szám 5-tel való osztása maradékával;

   (b) $(\mathbb{Z}_6, \odot)$, ahol $\mathbb{Z}_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ és $m \odot n$ egyenlő az mn szám 6-tal való osztása maradékával;

   (c) $(A, \triangle)$, ahol $A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$;

   (d) $(\{i, h\}, \rightarrow)$.

3. Asszociatívak-e ill. kommutatívak-e az alábbi műveletek?

   (a) az $A = \{a, b, c\}$ halmazon a

$*$	a	b	c
a	a	a	c
b	a	d	b
c	c	c	a

   művelettáblázattal definiált $*$ művelet;

   (b) $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \circ)$, ahol $x \circ y = \frac{xy}{x+y}$;

   (c) $(\mathbb{Z}, *)$, ahol $x * y = x + 2y$.

4. Félcsoportot alkotnak-e az alábbi algebrák?

   (a) $(\mathbb{N}, +)$ (b) $(\mathbb{N}_0, \cdot)$ (c) $(\mathbb{Z}, -)$ (d) $([0, 1], \cdot)$

   (e) $(\mathcal{P}(U), \cup)$ (f) $(\mathcal{P}(U), \setminus)$ (g) $(\{i, h\}, \leftrightarrow)$ (h) $(\{i, h\}, \rightarrow)$

5. Mutassa meg, hogy az alábbi algebrák félcsoportok! Van-e egységelem ill. zéróelem az adott algebrában? Ha létezik egységelem, határozza meg, hogy mely elemeknek létezik inverze, és adja meg az inverz elemeket!

   (a) $(\mathbb{Z}, \circ)$, ahol $x \circ y = x + y + 1$;

   (b) $(\mathbb{Z}, *)$, ahol $x * y = x + y - xy$;

   (c) $(\mathbb{Q}, *)$, ahol $x * y = x + y + xy$;

   (d) $(\mathcal{P}(U), \cap)$;

   (e) $(\mathcal{I}, \cdot)$, ahol A egy tetszőleges halmaz, $\mathcal{I} = \{\varphi\colon\ A \to A$ injektív leképezés$\}$ és $\cdot$ a leképezések szorzása művelet;

(f) $(\mathcal{S}, \cdot)$, ahol A egy tetszőleges halmaz, $\mathcal{S} = \{\varphi\colon A \to A \text{ szürjektív leképezés}\}$ és $\cdot$ a leképezések szorzása művelet.

6. Csoportot alkotnak-e az alábbi algebrák?

(a) $(\mathbb{N}, +)$	(b) $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, /)$
(c) $(\{i, h\}, \leftrightarrow)$	(d) $(\{i, h\}, \wedge)$
(e) $(\mathcal{P}(U), \cup)$	(f) $(\mathcal{P}(U), \triangle)$

7. Írja fel az alábbi algebrák művelettáblázatait! Csoportot alkotnak-e az alábbi algebrák?

(a) $(\mathbb{Z}_5, \oplus)$, ahol $\mathbb{Z}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ és $m \oplus n$ egyenlő az $m + n$ szám 5-tel való osztása maradékával

(b) $(\mathbb{Z}_5, \odot)$, ahol $\mathbb{Z}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ és $m \odot n$ egyenlő az mn szám 5-tel való osztása maradékával

(c) $(\mathbb{Z}_6, \odot)$, ahol $\mathbb{Z}_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ és $m \odot n$ egyenlő az mn szám 6-tal való osztása maradékával

8. Mutassa meg, hogy az alábbi algebrák csoportok!

(a) $(A, *)$, ahol $A = \{a, b, c\}$ és

$*$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

(b) $(A, \cdot)$, ahol $A = \{2^n\colon n \in \mathbb{Z}\}$;

(c) $(\mathbb{Z} \times \mathbb{R}_+, *)$, ahol $\mathbb{R}_+$ a pozitív valós számok halmaza és $(a, b) * (c, d) = (a + c, bd)$;

(d) $(\mathbb{R} \setminus \{-1\}, \circ)$, ahol $x \circ y = x + y + xy$;

(e) $(\mathcal{S}, \cdot)$, ahol $\mathcal{S} = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$, $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ és φ_4 $\mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ leképezések, amelyek a következő képletekkel vannak definiálva:

$$x\varphi_1 = x, \qquad x\varphi_2 = \frac{1}{x}, \qquad x\varphi_3 = -x, \qquad x\varphi_4 = -\frac{1}{x},$$

és $\cdot$ a leképezések szorzása művelet $\mathcal{S}$-en. (Írja fel a csoport művelettábláját is!)

(f) $(\mathcal{S}, \cdot)$, ahol $\mathcal{S} = \{id, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \psi_1, \psi_2\}$ egy A, B, C csúcspontú szabályos háromszöget önmagára leképező egybevágósági transzformációkból álló halmaz a $\cdot$ leképezés szorzás művelettel, mégpedig id az identikus transzformáció, φ_i $(i = 1, 2, 3)$ az A, B illetve C csúcson átmenő magasságvonalra való tükrözések, ψ_1 és ψ_2 pedig 60 illetve 120 fokos forgatás a háromszög középpontja körül pozitív irányban.

9. Az adott csoportban adja meg az a elem által generált ciklikus részcsoportot, és határozza meg $o(a)$-t is!

(a) $(\mathbb{C}, +)$, $\quad a = i$;

(b) $(\mathbb{Z}, +)$, $\quad a = 2$;

(c) $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$, $\quad a = 2$;

(d) a 8/b feladatban definiált csoport, $a = 1/4$;

(e) a 8/c feladatban definiált csoport, $a = (1, 3)$;

(f) a 8/e feladatban definiált csoport, $a = \varphi_2$;

(g) a 8/f feladatban definiált csoport, $a = \varphi_2$;

(h) a 8/f feladatban definiált csoport, $a = \psi_2$,

10. Írja fel az $(S_3, \cdot)$ permutációcsoport műveletttábláját (a csoportban szereplő egyes permutációkat nevezze el $\sigma_1, \ldots, \sigma_6$-tal)! Adjon meg egy kételemű részcsoportot $(S_3, \cdot)$-ban, és adja meg a részcsoport által generált mellékosztályokat! Adjon meg egy háromelemű részcsoportot $(S_3, \cdot)$-ban és adja meg a részcsoport által generált mellékosztályokat!

11. Egy $(G, \cdot)$ csoportban oldja meg az

    (a) $axbcx = abx$ (b) $xax = bba^{-1}$

    egyenleteket x-re! Egyértelmű-e a megoldás? Ha nem, adjon meg egy megoldást!

12. Mutassa meg, hogy ha egy $(G, \cdot)$ csoportban $(ab)^2 = a^2b^2$ minden $a, b \in G$-re, akkor a csoport kommutatív!

13. Mutassa meg, hogy ha egy csoportban minden elem inverze önmaga, akkor a csoport kommutatív!

14. Mutassa meg, hogy egy $(G, \cdot)$ csoportban

    (a) $o(a) = o(a^{-1})$ minden $a \in G$-re;

    (b) $o(a) = o(b^{-1}ab)$ minden $a, b \in G$-re;

    (c) $o(ab) = o(ba)$ minden $a, b \in G$-re.

15. Mutassa meg, hogy az alábbi algebrák gyűrűk!

    (a) $(\mathbb{Z}_5, \oplus, \odot)$ ahol $\mathbb{Z}_5$, $\oplus$ és $\odot$ a 7/a és 7/b feladatokban definiált;

    (b) $(\{i, h\}, \leftrightarrow, \vee)$;

    (c) $(\mathcal{P}(U), \triangle, \cap)$;

    (d) $(\{x + y\sqrt{3}\colon\ x, y \in \mathbb{Q}\}, +, \cdot)$.

16. Mutassa meg, hogy az alábbi leképezések homomorfizmusok! Melyek izomorfizmusok is a két algebra között?

    (a) $(\mathbb{Z}, \cdot)$ félcsoport, $(\mathbb{N}_0, \cdot)$ félcsoport, $\mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0$, $n \mapsto |n|$;

    (b) $(\mathbb{Z}, +)$ félcsoport, $(\mathbb{Q}, \cdot)$ félcsoport, $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$, $n \mapsto 2^n$;

    (c) $(\mathbb{R}_+, \cdot)$ csoport, $(\mathbb{R}, +)$ csoport, $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \log x$;

    (d) $(A, +)$ csoport, ahol $A = \{x + y\sqrt{3}\colon\ x, y \in \mathbb{Q}\}$, $(B, +)$ csoport, ahol $B = (x + iy \in \mathbb{C}\colon\ x, y \in \mathbb{R})$, $A \to B$, $x + y\sqrt{3} \mapsto x + yi$;

    (e) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ gyűrű, $(\mathbb{Z}_5, \oplus, \odot)$ gyűrű (lásd a 15/a feladatot), $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_5$, $n \mapsto$ (n 5-tel való osztása maradéka);

    (f) $(\{i, h\}, \leftrightarrow, \vee)$ gyűrű, $(\mathcal{P}(U), \triangle, \cap)$ gyűrű, $i \mapsto \emptyset$, $h \mapsto U$;

    (g) $(\{i, h\}, \leftrightarrow, \vee)$ gyűrű, $(\{\emptyset, \{a\}\}, \triangle, \cap)$ gyűrű, $i \mapsto \emptyset$, $h \mapsto \{a\}$.