MA1344i - 4. gyakorló feladatsor

1. Vizsgálja meg, hogy az alábbi relációk közül melyik reflexív, szimmetrikus, antiszimmetrikus, dichotom illetve tranzitív:

   (a) $\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \colon |a| = |b|\}$
   (b) $\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \colon a^2 \leq b^2\}$
   (c) $\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \colon a < b-1\}$
   (d) $\{(n,m) \in \mathbb{Z}^2 \colon n-m$ páros$\}$
   (e) $\{(n,m) \in \mathbb{Z}^2 \colon n-m$ páratlan$\}$
   (f) $\{(n,m) \in \mathbb{Z}^2 \colon n|m,\ n \neq m\}$
   (g) $\{(p,q) \colon p, q$ azonos fokszámú polinom$\}$
   (h) $\{(p,q) \colon p$ kisebb vagy egyenlő fokszámú polinom, mint $q\}$
   (i) $\{(e,f) \colon e$ és f egymást metsző síkbeli egyenesek$\}$
   (j) $\{(e,f) \colon e$ és f egymásra merőleges síkbeli egyenesek$\}$
   (k) $\{(e,f) \colon e$ és f síkbeli egyenesek távolsága az origótól egyenlő$\}$
   (l) $\{(A,B) \colon A, B \subseteq X,\ A \cap B \neq \emptyset\}$
   (m) $\{(A,B) \colon A, B \subseteq X,\ x_0 \in A \cap B\}$, ahol $x_0 \in X$ rögzített.

2. Igazolja, hogy egy $\rho \subseteq A^2$ reláció

   (a) reflexív, akkor és csak akkor, ha $\omega_A \subseteq \rho$;
   (b) szimmetrikus, akkor és csak akkor, ha a következő relációk közül valamelyik teljesül: $\rho^{-1} \subseteq \rho$, $\rho^{-1} = \rho$, $\rho \subseteq \rho^{-1}$;
   (c) tranzitív, akkor és csak akkor, ha $\rho^2 \subseteq \rho$.

3. Igaz-e, hogy reflexív relációk inverze reflexív? Igaz-e ugyanez szimmetrikus, antiszimmetrikus vagy tranzitív relációkra?

4. Mutassa meg, hogy ha egy $\rho \subseteq A^2$ reláció szimmetrikus és tranzitív, valamint minden $a \in A$-hoz létezik olyan $b \in A$, hogy $b \neq a$ és $(a,b) \in \rho$, akkor ρ reflexív is.

5. Tekintsük az $A = \{1,2,3,4,5\}$ halmazt és a rajta értelmezett

   (a) $\rho = \{(1,2),(2,4),(4,3),(5,2)\}$ (b) $\rho = \{(1,2),(1,3),(2,5),(4,2)\}$

   relációt. Rajzolja fel a ρ, ρ^2, ρ^3 relációk irányított gráfját! Adja meg ρ tranzitív lezártját és rajzolja fel annak irányított gráfját!

6. Mutassa meg, hogy ha ρ részbenrendezés A-n, akkor ρ^{-1} is részbenrendezés A-n!

7. Igazolja, hogy ha ρ részbenrendezés A-n és $B \subset A$, akkor $\rho \cap B^2$ részbenrendezés B-n!

8. Legyen $D_n = \{k \in \mathbb{N}\colon\ k|n,\ k > 1\}$, és definiálja az $|$ osztója reláció a részbenrendezést D_n-en. Rajzolja fel a

   (a) D_{30} (b) D_{27} (c) D_{60} (d) $D_{24} \cup D_{27}$

   részbenrendezett halmazok Hasse-diagramját!

9. Adjon példát olyan részbenrendezett halmazra, amelynek

   (a) pontosan három minimális eleme van;
   (b) egy minimális eleme van, de nincs legkisebb eleme;
   (c) két maximális és két minimális eleme van.

10. Tekintsük az $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ halmazt és azon a

    (a) $\rho = \{(a_1, a_2), (a_1, a_3), (a_3, a_4)\}$
    (b) $\rho = \{(a_1, a_2), (a_2, a_4), (a_5, a_3), (a_4, a_1)\}$
    (c) $\rho = \{(a_1, a_2), (a_2, a_4), (a_5, a_3), (a_4, a_5)\}$

    relációt. Kiterjeszthető-e ρ részbenrendezéssé A-n? Ha igen adjon meg két különböző ilyen kiterjesztést és ábrázolja az irányított gráfját és a Hasse-diagramját is a kiterjesztett relációknak! Kiterjeszthető-e ρ rendezéssé? Ha igen, adjon meg ilyen kiterjesztéseket és ábrázolja azokat!

11. Igazolja, hogy az adott reláció ekvivalenciareláció! Adja meg az ekvivalenciaosztályokat!

    (a) $\{(n, m) \in \mathbb{N}^2\colon\ n - m$ osztható hárommal$\}$
    (b) $\{(e, f)\colon\ e$ és f síkbeli egyenesek távolsága az origótól egyenlő$\}$
    (c) $\{(P, Q)\colon\ P$ és Q síkbeli pontok távolsága a sík egy rögzített egyenesétől egyenlő$\}$
    (d) $\{(P, Q)\colon\ P$ és Q síkbeli pontok távolsága a sík egy rögzített pontjától egyenlő$\}$
    (e) $\{(A, B)\colon\ A, B \subseteq X, A$ és B véges és egyenlő elemszámú, vagy mindkettő végtelen$\}$ (X rögzített halmaz)

12. Mutassa meg, hogy ha ρ ekvivalenciareláció, akkor ρ^{-1} is az!

13. Mutassa meg, hogy ha $\rho \subseteq A^2$ ekvivalenciareláció A-n, akkor és csak akkor, ha $\rho\rho^{-1} \subseteq \rho$ és $\omega_A \subseteq \rho$!

14. Mutassa meg, hogy egy halmaz ρ és τ ekvivalenciarelációinak $\rho\tau$ szorzata akkor és csak akkor ekvivalenciareláció, ha $\rho\tau = \tau\rho$!

15. Tekintsük a

    (a) $\varphi\colon \mathbb{R} \to [-1, 1], \quad x \mapsto \sin(x)$ (b) $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+, \quad x \mapsto x^2$

    leképezéseket. Adja meg a leképezés magját, azaz definiálja a $\ker\varphi$ relációt!