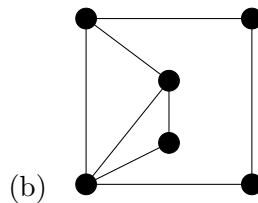
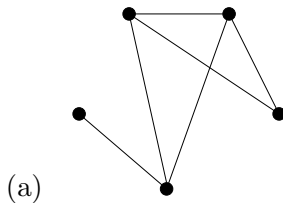


MA1243d - 5. gyakorló feladatsor

- Rajzolja le az alábbi leírásokkal adott egyszerű gráfokat!
 - A gráf csúcspontjai egy tetraéder csúcsai, élei pedig a tetraéder élei.
 - A gráf csúcspontjai egy oktaéder csúcsai, élei pedig az oktaéder élei.
 - A gráf csúcspontjai egy kocka oldalai középpontjai, az élek pedig a szomszédos oldalak középpontjait kötik össze.
- Van-e olyan gráf, amely pontjai fokszámai 3, 3, 4, 5, 5, 6, 7?
- Van-e olyan gráf, amely pontjai fokszámai 1, 3, 3, 3?
- Mutassa meg, hogy bármely egyszerű gráfban létezik legalább két olyan pont, amelynek fokszáma azonos!
- Igazolja, hogy egy társaságban mindig létezik legalább két olyan ember, akiknek ugyanannyi ismerősük van a társaságban!
- Mutassa meg, hogy ha egy gráf pontjai száma páratlan, akkor van páros fokszámú pontja!
- Mutassa meg, hogy ha egy egyszerű gráfban minden pont fokszáma legalább kettő, akkor létezik a gráfban kör!
- Mutassa meg, hogy ha egy egyszerű gráfban bármely pontra legalább k darab él illeszkedik, akkor létezik k hosszú út a gráfban!
- Mutassa meg, hogy ha egy n pontú gráfnak legalább n éle van, akkor van benne kör!
- Mutassa meg, hogy ha egy egyszerű gráfban bármely pontra fokszáma legalább 3, akkor létezik páros hosszú kör a gráfban!
- Ha egy összefüggő G gráfból elhagyunk egy d fokszámú pontot és a hozzá tartozó éleket, akkor legfeljebb hány komponensű lesz a kapott gráf?
- Igazolja, hogy ha egy hurokmentes n -pontú gráfban legalább n él van, akkor létezik kör a gráfban!
- Adja meg az alábbi egyszerű gráfok komplementer gráfját!



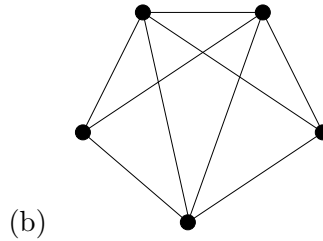
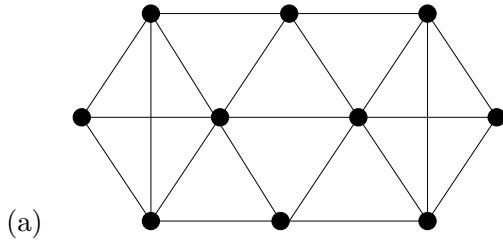
- Írja fel a 13. feladatban szereplő mátrixok szomszédsági (adjacencia) mátrixait!

15. Határozza meg a tintacsepegtetős módszerrel az alábbi, szomszédsági mátrixokkal megadott gráfok komponenseit! Rajzolja fel a gráfokat!

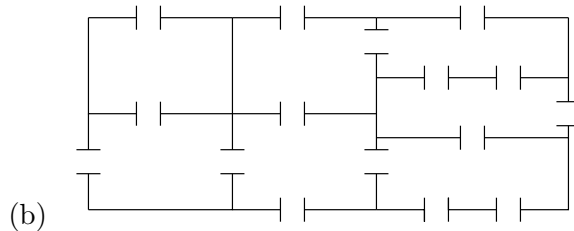
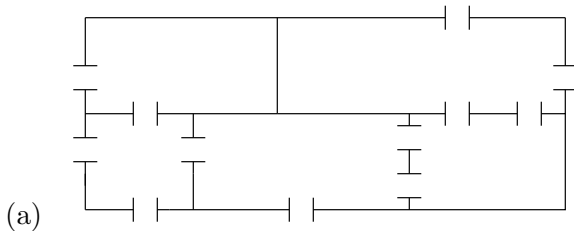
$$(a) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(b) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

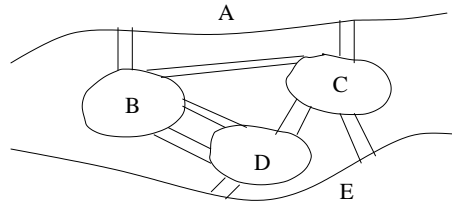
16. Mutassa meg, hogy ha egy egyszerű, $2n$ pontot tartalmazó gráfban minden pont fokszáma legalább n , akkor a gráf összefüggő!
17. Mutassa meg, hogy bármely G gráfban vagy G vagy a komplementere összefüggő!
18. Mutassa meg, hogy minden összefüggő gráfban létezik olyan pont, amelyet elhagyva a kapott gráf összefüggő marad!
19. Egy G gráf k db komponensből áll, és minden komponense fa. Hány éle van G -nek?
20. Hány különböző 5 pontú fa van, ha a gráf pontjait nem különböztetjük meg? És mennyi, ha megkülönböztetjük?
21. Egy 20 pontú fának 18 db elsőfokú pontja van.
- Hányadfokú lehet a maradék két pontja a fának?
 - Hány élt tartalmazhat a leghosszabb útja?
 - Hány ilyen gráf létezik, ha a pontokat nem különböztetjük meg?
22. Létezik-e nyílt vagy zárt Euler-vonal a következő gráfokban? Ha igen, adjon meg egyet!



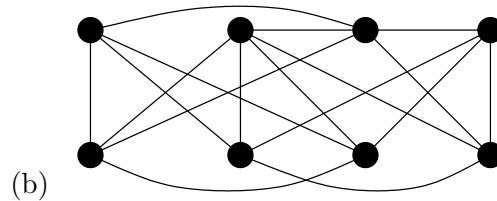
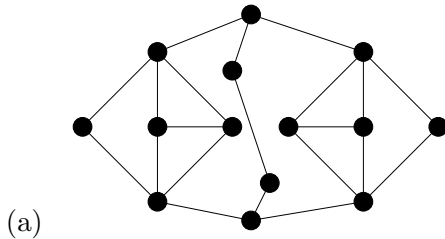
23. Tekintsük az alábbi lakás alaprajzokat. Be lehet-e járni a lakás összes szobáját és a külső teret úgy, hogy egy szobából indulunk ki, oda érünk vissza, és minden ajtón pontosan egyszer megyünk keresztül? Ha igen, adjon meg egy ilyen bejárást!



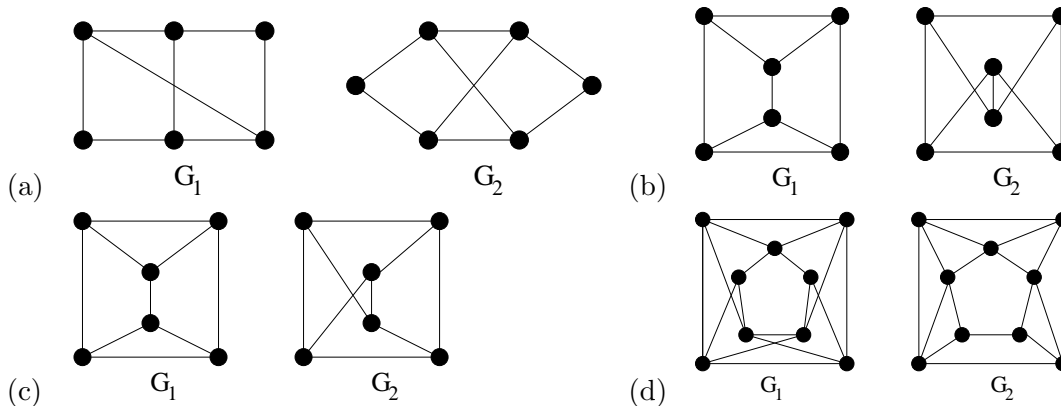
24. Tekintsük az alábbi térképet, amelyen egy folyón található 3 sziget és azokat egymással és a folyó két partjával összekötő 8 híd látható. Lehet-e olyan körsétát tenni a szigeteken és a folyó két partján, amely mentén minden hídon pontosan egyszer megyünk keresztül?



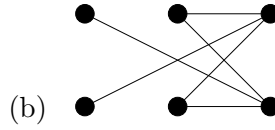
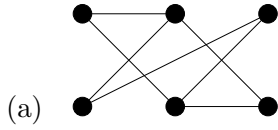
25. 27 db egységnyi élű, $3 \times 3 \times 3$ as kockába rakott sajtókockákon szeretné keresztülrágni magát egy kiséger úgy, hogy minden lépésben a már megrágott sajtókockából annak valamelyik oldallapján keresztül egy szomszédos sajtókockába rágja át magát. Ha a nagy kocka valamelyik sarkán levő sajtókockából indul, át tudja-e rágni magát mind a 27 sajtókockán úgy, hogy a középső sajtókockába érkezzon a végén?
26. Mutassa meg, hogy ha egy páros gráfban létezik Hamilton-kör, akkor a gráf két pontosztálya azonos elemszámú!
27. Be lehet-e járni egy 9×9 -es sakktábla minden pontját lóugrásokkal úgy, hogy minden mezőre pontosan egyszer lépünk, és a végén visszaérünk a kiinduló mezőre?
28. Igazolja, hogy ha egy gráfban van Hamilton-kör, akkor bármely pontját ill. bármely élet elhagyva a kapott gráfok összefüggők lesznek!
29. Létezik-e Hamilton-kör a következő gráfokban? Ha igen, adjon meg egyet!



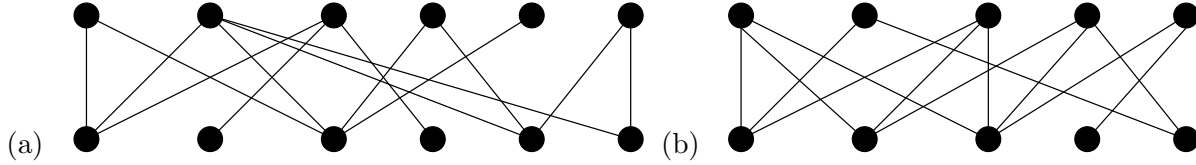
30. Adjon meg olyan gráfot, amelyben létezik Hamilton-kör, de nincs benne zárt Euler-vonal! Adjon meg olyan gráfot, amelyben létezik zárt Euler-vonal, de nincs benne Hamilton-kör!
31. Mutassa meg, hogy ha egy 12 tagú társaságban mindenki a többiek közül legfeljebb ötöt nem ismer, akkor mind a tizenketten leültethetők egy kerek asztal köré úgy, hogy mindenkinek ismerőse legyen a két szomszédja!
32. Izomorfak-e az alábbi gráfok? Ha igen, adja meg az izomorfíát a gráfok között!



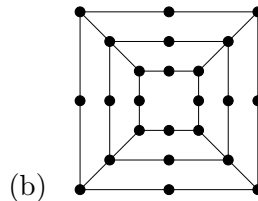
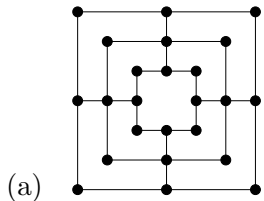
33. Páros gráfok-e az alábbi gráfok? Ha igen, adja meg a gráf két pontosztályát!



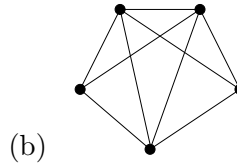
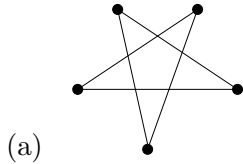
34. Adjon meg egy maximális párosítást és egy minimális lefedő ponthalmazt az alábbi gráfban! Létezik-e teljes párosítás a gráfban? Létezik-e a felső pontokat lefedő párosítás? Létezik-e az alsó pontokat lefedő párosítás?



35. Adjon meg egy maximális párosítást és egy minimális lefedő ponthalmazt az alábbi gráfban! Adja meg $\nu(G)$ illetve $\tau(G)$ értékét!



36. Rajzolja síkba az alábbi gráfokat!

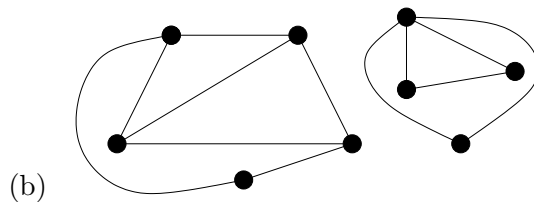
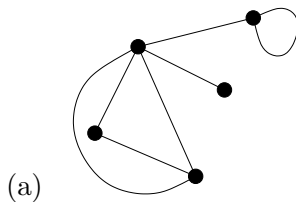


37. Táncolhat-e úgy egy táncmulatságon az egész társaság egyidejűleg, hogy minden pár férfi és nő tagja ismeri egymást, és hogy

- (a) a társaságban minden nő pontosan k db férfit ismer, és minden férfi is pontosan k db nőt ismer;
- (b) azonos számú férfi és nő van jelen, továbbá minden nő ismeri a férfiak legalább felét, és minden férfi is ismeri a nők legalább felét?

38. Igazolja, hogy az 5 pontú teljes gráf nem áll elő két páros gráf egyesítéseként!

39. Rajzolja fel az alábbi síktérképek duális gráfjait! Hány pont, ország és él van a gráfban illetve a duálisában? Hány él határolja az egyes országokat?



40. Színezza ki minimális számú színnel a 32. feladatban szereplő gráfok pontjait!

41. Színezza ki minimális számú színnel a 39. feladatban szereplő gráfok országait!