MA1243d - 4. gyakorló feladatsor

1. Adja meg az s_n sorozat rekurzív definícióját, ahol

   (a) s_n jelöli azon n hosszú bináris sorozatok (0 és 1 számokból álló sorozatok) számát, amelyben nem fordul elő a 001 bitminta.

   (b) s_n jelöli azon n hosszú bináris sorozatok számát, amelyben nem fordul elő az 111 bitminta.

   (c) s_n jelöli azon n hosszú bináris sorozatok számát, amelyben nem fordul elő az 0000 bitminta.

   (d) Legyen $\Sigma = \{a, b, c, d\}$, és s_n jelöli a Σ ábc betűiből alkotott azon szavakat, amelyekben nem fordul elő az aa minta.

   (e) 100000 Ft-ot befektetünk évi 9%-os kamattal. Jelölje s_n a tőkénket az n-edik év végén. Mennyi pénzünk lesz 50 év múlva?

   (f) Egy 100 baktériumból álló baktériumtelep óránként megháromszorozódik. Jelölje s_n a baktériumok számát az n-edik óra végén. 10 óra múlva hány baktérium lesz?

   (g) Hányféleképpen mászhatunk fel egy n lépcsőből álló lépcsősorra, ha 1, 2 vagy 3 lépcsőt léphetünk egyszerre? (Legyen s_n a feladat megoldása.)

   (h) Hányféleképpen költhetünk el n forintot, ha vehetünk 1 Ft-ért bélyeget, 1 Ft-ért rágót vagy 5 Ft-ért kólát? (Legyen s_n a feladat megoldása.)

2. Rekurziók segítségével oldja meg az alábbi feladatokat!

   (a) A Föld népessége 2004-ben 6 billió, évi 3%-ot nő. 2030-ban mekkora lesz a népesség?

   (b) Hányféleképpen léphet egy robot n métert, ha egy lépéssel 1 vagy 2 métert tud megtenni?

   (c) Hányféleképpen festhetünk be egy n szintes házat két színnel (fehér, kék), ha minden emeletet egyszínűre festünk és két egymás utáni szint nem lehet kék?

   (d) Hány olyan n hosszú bitsorozat van, amelyben legalább 2 db egymást követő 0 van?

   (e) Hány olyan n hosszú, 0,1,. . . ,9 számjegyekből álló sorozat van, amelyben vagy nincs 0 vagy páros sok 0 van?

   (f) Határozza meg az első n db egész szám összegét!

   (g) Határozza meg az első n db egész szám négyzetösszegét!

   (h) Határozza meg az első n db egész szám köbeinek összegét!

3. Adja meg az alábbi rekurzív sorozatok képletét, illetve ahol nincs megadva kezdeti feltétel, az általános képletét!

   (a) $s_{n+1} = 3s_n - 2s_{n-1}, \quad s_0 = 0, \quad s_1 = 1$

   (b) $s_{n+1} = 2s_n + 3s_{n-1}, \quad s_0 = 1, \quad s_1 = 5$

   (c) $s_{n+1} = 2s_n - s_{n-1}, \quad s_0 = 2, \quad s_1 = -1$

   (d) $s_{n+1} = -4s_n + 4s_{n-1}, \quad s_0 = -2, \quad s_1 = 2$

   (e) $s_{n+1} = -3s_{n-1}, \quad s_0 = 1, \quad s_1 = 1$

   (f) $s_{n+1} = 16s_{n-1}, \quad s_0 = 1, \quad s_1 = 1$

   (g) $s_{n+1} = -3s_n - s_{n-1}, \quad s_0 = 0, \quad s_1 = 1$

   (h) $s_{n+1} = 4s_n + 1, \quad s_0 = 1$

   (i) $s_{n+1} = 3s_n + n$

   (j) $s_{n+1} = -2s_n + 3^n$

(k) $s_{n+1} = 4s_n + 2n - 3$

(l) $s_{n+1} = -s_n + 6s_{n-1} + 3n$

(m) $s_{n+1} = -s_{n-1} + n^2 - 1$

(n) $s_{n+1} = 2s_n + s_{n-1} + 5 \cdot 2^n$

(o) $s_{n+1} = 2s_n + 3s_{n-1} + \frac{1}{2^n}$

4. Generátorfüggvény módszerrel oldja meg az alábbi rekurziókat!

(a) $s_{n+1} = 3s_n, \quad s_0 = 1$

(b) $s_{n+1} = -2s_n, \quad s_0 = 2$

(c) $s_{n+1} = s_n + 3, \quad s_0 = 1$

(d) $s_{n+1} = s_n - 2, \quad s_0 = 2$

(e) $s_{n+1} = 2s_n - s_{n-1}, \quad s_0 = 0, \quad s_1 = 1$

(f) $s_{n+1} = s_n + 2n, \quad s_0 = 2$

(g) $s_{n+1} = 3s_n + 3s_{n-1} + s_{n-2}, \quad s_0 = 0, \quad s_1 = 0, \quad s_2 = 1$