MA1243d - 3. gyakorló feladatsor

1. Igazolja az alábbi azonosságokat!

   (a) $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$

   (b) $V_n^k \cdot V_{n-k}^{n-k} = n!$ ahol $V_n^k = n(n-1)\cdots(n-k+1)$

   (c) $V_n^k = V_{n-1}^k + kV_{n-1}^{k-1}$

   (d) $V_n^{k+1} = nV_{n-1}^k$

   (e) $\binom{n}{k}\binom{k}{j} = \binom{n}{j}\binom{n-j}{k-j}$

   (f) $\binom{k}{0} + \binom{k+1}{1} + \cdots + \binom{n}{n-k} = \binom{n+1}{n-k}$

   (g) $\binom{n}{k-1} + \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \binom{n+1}{k}$

   (h) $\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k} = 2^{2n}$

   (i) $\binom{m}{0} + \binom{m+1}{1} + \cdots + \binom{m+j}{j} = \binom{m+j+1}{j}$

   (j) $\binom{2n}{2} = 2\binom{n}{2} + n^2$

   (k) (Vandermone-féle konvolúciós formula)

   $$\binom{n+m}{k} = \binom{n}{0}\binom{m}{k} + \binom{n}{1}\binom{m}{k-1} + \cdots + \binom{n}{k}\binom{m}{0}$$

2. A polinomiális tétel használva oldja meg a következő feladatokat!

   (a) Fejtse ki az $(x+y+z+w)^3$ hatványt!

   (b) Adja meg x^2y^3z együtthatóját az $(x+y+z)^6$ kifejtésében!

   (c) Adja meg x^5z^4 együtthatóját az $(x+y+z+w)^9$ kifejtésében!

3. Hányféleképpen lehet felosztani egy 6 elemű S halmazt páronként diszjunkt A_1, A_2 és A_3 részhalmazai uniójára, ahol $|A_1| = 3$, $|A_2| = 1$ és $|A_3| = 2$?

4. Hányféleképpen lehet felosztani az $\{1, 2, \ldots, 10\}$ halmazt 5 db páronként diszjunkt és egyenlő elemszámú részhalmazai uniójára?

5. Hányféleképpen lehet felosztani az $\{1, 2, \ldots, 8\}$ halmazt páronként diszjunkt A_1, A_2, A_3 és A_4 részhalmazai uniójára, ahol $|A_1| = 3$, $|A_2| = 2$, $|A_3| = 1$ és $|A_4| = 2$?

6. Számítsa ki az

   $$\sum \binom{n}{i_1, i_2, \ldots, i_k}$$

   összeget, ahol az összegzést az összes olyan $i_1, i_2, \ldots, i_k$ nemnegatív egész számra kell végezni, amelyre $i_1 + i_2 + \cdots + i_k = n$!

7. Mutassa meg, hogy $\binom{n+1}{i,j,k} = \binom{n}{i-1,j,k} + \binom{n}{i,j-1,k} + \binom{n}{i,j,k-1}$.

8. Mutassa meg, hogy $\binom{n}{i,j,k} = \binom{n}{i}\binom{n-i}{j}\binom{n-i-j}{k}$.