MA1243d - 1. gyakorló feladatsor

1. Teljes indukcióval igazolja az alábbi összefüggéseket!

   (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

   (b) $\displaystyle\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

   (c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

   (d) $\displaystyle 1^2\cdot 2 + 2^2\cdot 3 + 3^2\cdot 4 + \cdots + n^2(n+1) = \frac{n(n+1)(3n^2+7n+2)}{12}$

   (e) $1\cdot 2^0 + 2\cdot 2^1 + 3\cdot 2^2 + \cdots + n2^{n-1} = (n-1)2^n + 1$

2. A logikai szita-formula alkalmazásával oldja meg az alábbi feladatokat!

   (a) Egy 200 hallgatóból álló évfolyamból 80 jár matematika órára, 60 jár kémia órára, 30 pedig mindkét órára. Hány hallgató jár összesen matematika vagy kémia órára? Hány olyan hallgató van, aki nem jár sem matematika, sem kémia órára?

   (b) Hány olyan 1 és 600 közötti egész szám van, amely vagy 3-mal vagy 5-tel osztható? Hány olyan 1 és 600 közötti egész szám van, amely sem 3-mal sem 5-tel nem osztható?

   (c) Hány olyan 6-jegyű természetes szám van, amelyik vagy 19-cel kezdődik vagy 68-ra végződik? (A szám első számjegye nem 0!)

   (d) Hány szökőév van 1000 és 4004 között? (Egy év szökőév, ha (a) az évszám osztható 4-gyel, de nem osztható 100-zal, vagy (b) osztható 400-zal.)

   (e) Egy 100 hallgatóból álló évfolyamon 50 hallgató jár matematika órára, 40 informatika órára, 35 kémia órára, 12 jár matematika és kémia órára is, 10 matematika és kémia órára is, 11 informatika és kémia órára is, 5 hallgató pedig mind a három órára jár. Hány hallgató jár legalább az egyik órára? Hány olyan hallgató van, aki nem jár az egyik órára sem?

   (f) Határozza meg azon 1 és 500 közötti egész számok számát, amelyek a 2, 3 és 5 közül legalább az egyikkel oszthatók!

   (g) Határozza meg azon 1 és 500 közötti egész számok számát, amelyek a 2, 3, 5 és 7 közül legalább az egyikkel oszthatók!

3. A skatulya-elv segítségével oldja meg az alábbi feladatokat!

   (a) Mutassa meg, hogy emberek bármely csoportjában van olyan 2 ember, akiknek a csoporton belül ugyanannyi ismerőse van!

   (b) Mutassa meg, hogy ha $a_1 + a_2 + \cdots + a_n - n + 1$ db labdát elhelyezünk n db dobozban, akkor vagy az első dobozba legalább a_1 db labda kerül, vagy a második dobozba legalább a_2 db labda, és így tovább, vagy az n-edik dobozba a_n db labda kerül!

   (c) Tegyük fel, hogy m db labdát elhelyezünk n db dobozban, és $m < n(n-1)/2$. Mutassa meg, hogy ekkor legalább 2 dobozban ugyanolyan számú labda van!

   (d) Mutassa meg, hogy bárhogyan válaszva ki $n+1$ db számot az $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ halmazból, mindig létezik két olyan szám a kiválasztottak között, hogy az egyik osztja a másikat!

   (e) Maximum hány olyan pontot lehet kijelölni egy 2 oldalú négyzetben, hogy bármely kettő távolsága $\sqrt{2}$-nél nagyobb legyen?