Gyakorló feladatok - 6.

MA1222i

1. Ábrázolja a következő egyenletek néhány trajektóriáját az origó környezetében! Adja meg a kritikus pont típusát, és határozza meg, hogy stabil, aszimptotikusan stabil vagy instabil a kritikus pont!

   (a) $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}$, (b) $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$,

   (c) $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}$, (d) $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} \mathbf{x}$,

   (e) $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x}$, (f) $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}$,

   (g) $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$, (h) $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -0.25 \end{pmatrix} \mathbf{x}$,

   (i) $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$, (j) $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$.

2. Határozza meg a következő egyenletek kritikus pontját, a kritikus pont típusát és a stabilitási tulajdonságát!

   (a) $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$,

   (b) $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$,

   (c) $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

3. Tekintsük a

   $$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} \epsilon & 1 \\ -1 & \epsilon \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

   egyenletet. Adja meg az origó típusát, és határozza meg, hogy stabil, aszimptotikusan stabil vagy instabil a kritikus pont, ha

   (a) $\epsilon = 0$, (b) $\epsilon < 0$, (c) $\epsilon > 0$!

4. Tekintsük a

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -\epsilon & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

egyenletet. Adja meg az origó típusát, és határozza meg, hogy stabil, aszimptotikusan stabil vagy instabil a kritikus pont, ha

$$(a) \quad \epsilon = 0, \qquad (b) \quad \epsilon < 0, \qquad (c) \quad \epsilon > 0!$$

5. Mutassa meg, hogy az origó kritikus pontja a következő rendszereknek, és vizsgálja meg az origó stabilitási tulajdonságát!

   (a) $x' = x - y + xy, \qquad y' = 3x - 2y - xy,$
   (b) $x' = x + x^2 + y^2, \qquad y' = y - xy,$
   (c) $x' = -2x - y - x(x^2 + y^2), \qquad y' = x - y + y(x^2 + y^2),$
   (d) $x' = y + x(1 - x^2 - y^2), \qquad y' = -x + y(1 - x^2 - y^2),$
   (e) $x' = 2x + y + xy^3, \qquad y' = x - 2y - xy,$
   (f) $x' = x + 2x^2 - y^2, \qquad y' = x - 2y + x^3.$

6. Keresse meg a következő rendszerek összes valós kritikus pontjait, és vizsgálja meg ezekben a pontokban a kritikus pontok stabilitási tulajdonságait!

   (a) $x' = x(1.5 - x - 0.5y), \quad y' = y(2 - y - 0.75x),$
   (b) $x' = x(1.5 - x - 0.5y), \quad y' = y(2 - 0.5y - 1.5x),$
   (c) $x' = x(1.5 - 0.5y), \quad y' = y(-0.5 + x),$
   (d) $x' = x(1 - 0.5x - 0.5y), \quad y' = y(-0.25 + 0.5x),$
   (e) $x' = x + y^2, \qquad y' = x + y,$
   (f) $x' = 1 - xy, \qquad y' = x - y^3,$
   (g) $x' = x - x^2 - xy, \qquad y' = 3y - xy - 2y^3,$
   (h) $x' = 1 - y, \qquad y' = x^2 - y^2.$

7. Keressen $V(x, y) = ax^2 + cy^2$ alakú Ljapunov-függvény a következő rendszerekhez, és mutassa meg, hogy az origó adott stabilitási tulajdonságú!

   (a) $x' = -x^3 + xy^2, \qquad y' = -2x^2y - y^3,$ aszimptotikusan stabil,
   (b) $x' = -\frac{1}{2}x^3 + 2xy^2, \qquad y' = -y^3,$ aszimptotikusan stabil,
   (c) $x' = -x^3 + 2y^3, \qquad y' = -2xy^2,$ stabil,
   (d) $x' = x^3 - y^3, \qquad y' = 2xy^2 + 4x^2y + 2y^3,$ instabil.