Gyakorló feladatok - 4.

MA1222i

1. Adja meg a következő egyenletek általános megoldását, illetve ahol kezdeti feltétel is adott, a kezdeti érték feladat megoldását!

   (a) $y'' + 3y' + 2y = 0,$ (b) $y'' + y' - 2y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1,$

   (c) $y'' - 2y' + 2y = 0,$ (d) $y'' + 2y' + 2y = 0, \quad y(\pi/4) = 2, \quad y'(\pi/4) = -2,$

   (e) $9y'' + 6y' + y = 0,$ (f) $y'' + 4y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1,$

   (g) $y'' - 4y' + 8y = 0,$ (h) $y'' + 4y' + 4y = 0, \quad y(-1) = 2, \quad y'(-1) = 1.$

2. Keresse meg az összes olyan α számot, amelyre az $y'' - y' - 2y = 0, \quad y(0) = \alpha, \quad y'(0) = 2$ feladat megoldása nullához tart ha $x \to \infty$!

3. Legyenek a, b és c pozitív konstansok. Mutassa meg, hogy az $ay'' + by' + cy = 0$ egyenlet minden megoldása nullához tart, ha $x \to \infty$!

4. Legyen $a > 0$.

   (a) Mutassa meg, hogy ha $c > 0$ de $b = 0$, akkor az előző feladat állítása már nem teljesül, viszont minden megoldás korláros marad $x > 0$-ra.

   (b) Mutassa meg, hogy ha $b > 0$ de $c = 0$, akkor az előző feladat állítása már nem teljesül, de minden megoldás konvergál egy konstanshoz ha $x \to \infty$!

5. Határozza meg, hogy a következő függvények lineárisan függetlenek-e:

   (a) $f(x) = x^2 + 5x, \; g(x) = x^2 - 5x,$ (b) $f(x) = \cos 3x, \; g(x) = 4\cos^3 x - 3\cos x,$

   (c) $f(x) = x, \quad g(x) = 1/x,$ (d) $f(x) = e^{3x}, \quad g(x) = e^{3(x-1)}.$

6. Tegyük fel, hogy f és g a $(-10, 10)$ intervallumon definiált függvények, amelyek Wronski-determinánsa $W(x) = x \sin^2 x$. Lineárisan független-e f és g a $(-10, 10)$ intervallumon? Lehet-e f és g megoldása egy másodrendű lineásris homogén differenciálegyenletnek?

7. Legyen y_1 és y_2 fundamentális megoldása az $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ egyenletnek. Mutassa meg, hogy ekkor $c_1 y_1$ és $c_2 y_2$ is fundamentális megoldása az egyenletnek!

8. Legyen y_1 és y_2 fundamentális megoldása az $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ egyenletnek. Mutassa meg, hogy ekkor $y_3 = y_1 + y_2$ és $y_4 = y_1 - y_2$ is fundamentális megoldása az egyenletnek! Általánosítsa az állítást az $y_3 = ay_1 + by_2$ és $y_4 = cy_1 + dy_2$ alakú függvényekre!

9. Határozza meg az $x^2 y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = 0$ egyenlet két megoldása Wronski-determinánsának alakját!

10. Legyen y_1 és y_2 két lineárisan független megoldása az $xy'' - 2y' + xe^x y = 0$ egyenletnek, amelyre $W_{y_1,y_2}(1) = 2$. Határozza meg az $W_{y_1,y_2}(5)$ kifejezés értékét!

11. Mutassa meg, hogy ha y_1 és y_2 két olyan megoldása az $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ egyenletnek, melyeknek létezik közös zérόhelyük egy I intervallumon, akkor y_1 és y_2 nem lehet fundamentális megoldás az I intervallumon!

12. Mutassa meg, hogy ha y_1 és y_2 két olyan megoldása az $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ egyenletnek, melyek közös pontban veszik fel egyik lokális szélsőértéküket egy I nyílt intervallumon, akkor y_1 és y_2 nem lehet fundamentális megoldás az I intervallumon!

13. Adja meg a következő egyenletek általános megoldását, illetve ahol kezdeti feltétel is adott, a kezdeti érték feladat megoldását!

    (a) $y'' + 2y' + 5y = 3\sin 2x$,
    (b) $y'' + 4y = x^2 + 3e^x, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1$,
    (c) $2y'' + 3y' + y = x^2\sin x + 3e^{2x}$
    (d) $y'' + 2y' + 5y = 4e^{-x}\cos 2x,\ y(0) = 2,\ y'(0) = -1$,
    (e) $y'' + y = x(1 + \sin x)$,
    (f) $y'' + 3y' + 2y = 3xe^{-x}\cos 2x - 2x\sin x$,
    (g) $y'' - 2y' + y = e^x/(1 + x^2)$,
    (h) $y'' + 4y' + 4y = x^{-2}e^{-2x}, \quad x > 0$.

14. A következő egyenleteknek adott egy megoldása. Keresse meg az egyenlet általános megoldását!

    (a) $x^2y'' + 2xy' - 2y = 0, \quad x > 0, \quad y_1(x) = x$,
    (b) $x^2y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = 0, \quad x > 0, \quad y_1(x) = x$,
    (c) $(x-1)y'' - xy' + y = 0, \quad x > 1, \quad y_1(x) = e^x$,
    (d) $x^2y'' + xy' + (x^2 - 0.25)y = 0, \quad x > 0, \quad y_1(x) = x^{-1/2}\sin x$.

15. Oldja meg a következő feladatokat $x > 0$-ra:

    (a) $x^2y'' + 2xy' = 0$,
    (b) $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$,
    (c) $x^2y'' + 8xy' + 12y = 0$,
    (d) $2x^2y'' + xy' - 3y = 0, \quad y(1) = 1,\ y'(1) = 4$,
    (e) $4x^2y'' + 8xy' + 17y = 0, \quad y(1) = 2,\ y'(1) = -3$.

16. Keresse meg az összes olyan α számot, amelyre az $x^2y'' + \alpha xy' + (5/2)y = 0$ egyenlet megoldása nullához tart, ha $x \to \infty$!

17. Keresse meg az összes olyan α számot, amelyre az $x^2y'' + \alpha y = 0$ egyenlet megoldása nullához tart, ha $x \to \infty$!

18. Oldja meg a következő egyenleteket:

    (a) $x^2y' + 2xy' - 1 = 0, \quad x > 0$,
    (b) $y'' + x(y')^2 = 0$,
    (c) $x^2y'' = (y')^2, \quad x > 0$,
    (d) $yy'' + (y')^2 = 0$,
    (e) $y'' + y(y')^3 = 0$,
    (f) $y'' + (y')^2 = 2e^{-y}$.

19. Oldja meg a következő feladatokat:

    (a) $y''' - y'' - y' + y = 0$,
    (b) $y^{(6)} - y'' = 0$,
    (c) $y^{(4)} - 4y''' + 4y'' = 0$,
    (d) $y^{(6)} + y = 0$,
    (e) $y^{(4)} - y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = -1, \quad y'''(0) = 0$.