Gyakorló feladatok - 2.

MA1222i

1. Oldja meg a következő kezdeti érték feladatokat:

   (a) $y' + 2y = g(x), \quad y(0) = 0$, ahol
   $$g(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 1, \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

   (b) $y' + p(x)y = 0, \quad y(0) = 1$, ahol
   $$p(x) = \begin{cases} 2, & 0 \le x \le 1, \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

2. Adja meg a következő kezdeti érték feladatok megoldását, és vizsgálja meg, hogyan függ a megoldás értelmezési tartománya a kezdeti értéktől:

   (a) $y' = -4x/y, \quad y(0) = y_0$,
   (b) $y' = 2xy^2, \quad y(0) = y_0$,
   (c) $y' + y^3 = 0, \quad y(0) = y_0$,
   (d) $y' = x^2/y(1 + x^3), \quad y(0) = y_0$.

3. Oldja meg a következő egyenleteket:

   (a) $x^2y' + 2xy - y^3 = 0, \quad x > 0$,
   (b) $y' = 2y - 4y^2$,
   (c) $y' = 5y - y^3$.

4. Oldja meg a következő egyenleteket:

   (a) $(y \cos x + 2xe^y) + (\sin x + x^2e^y - 1)y' = 0$,
   (b) $(2x + 3) + (2y - 2)y' = 0$,
   (c) $(3x^2 - 2xy + 2)\,dx + (6y^2 - x^2 + 3)\,dy = 0$,
   (d) $(e^x \sin y - 2y \sin x)\,dx + (e^x \cos y + 2 \cos x)\,dy = 0$,
   (e) $(3xy + y^2) + (x^2 + xy)y' = 0$,
   (f) $y + (2x - ye^y)y' = 0$,
   (g) $(x + 2) \sin y\,dx + x \cos y\,dy = 0$,
   (h) $(3x^2y + 2xy + y^3)\,dx + (x^2 + y^2)\,dy = 0$,
   (i) $y' = e^{2x} + y - 1$,

(j) $e^x\,dx + \left(e^x \operatorname{ctg} y + \frac{2y}{\sin y}\right) dy = 0.$

5. Oldja meg a következő egyenleteket:

   (a) $y' = \dfrac{y^2 + 2xy}{x^2},$

   (b) $y' = \dfrac{x + y}{x},$

   (c) $y' = \dfrac{x^2 + 3y^2}{2xy},$

   (d) $(x^2 + 3xy + y^2)\,dx - x^2\,dy = 0,$

   (e) $y' = \dfrac{2y - x + 5}{2x - y - 4},$

   (f) $y' = -\dfrac{4x + 3y + 15}{2x + y + 7},$

   (g) $y' = \dfrac{x + 3y - 5}{x - y - 1}.$

6. Oldja meg a következő feladatokat:

   (a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^3 - 2y}{x},$

   (b) $y' = \dfrac{2x + y}{3 + 3y^2 - x}, \quad y(0) = 0,$

   (c) $y' = e^{x+y},$

   (d) $(x^2 + y)\,dx + (x + e^y)\,dy = 0,$

   (e) $x\dfrac{dy}{dx} + xy = 1 - y, \quad y(1) = 0,$

   (f) $xy' = y + xe^{y/x},$

   (g) $y' = \dfrac{x^2 - 1}{y^2 + 1},$

   (h) $\left(2\dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x^2 + y^2}\right) dx + \left(\dfrac{x}{x^2 + y^2} - \dfrac{x^2}{y^2}\right) dy = 0,$

   (i) $y' = \dfrac{1}{e^y - x}, \quad y(1) = 0.$