

## 2. Másodrendű skaláris differenciálegyenletek

Legyen  $I \subset \mathbb{R}$  egy nyílt intervallum,  $p, q, f: I \rightarrow \mathbb{R}$ . Az *explicit másodrendű inhomogén lineáris skaláris differenciálegyenlet* általános alakja:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \quad x \in I. \quad (2.1)$$

A megfelelő *másodrendű homogén lineáris differenciálegyenlet* általános alakja

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad x \in I. \quad (2.2)$$

Legyen  $x_0 \in I$  egy kezdeti időpont, és tekintsük az

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0 \quad (2.3)$$

kezdeti feltételeket.

Az 1.37. Tételből rögtön következik az alábbi egzisztencia és unicitás tétel.

**2.1. Tétel.** *Legyenek  $p, q, f: I \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos függvények,  $x_0 \in I$ . Ekkor a (2.1) egyenletnek bármely (2.3) kezdeti feltételhez létezik pontosan egy megoldása az  $I$  intervallumon.*

### 2.1. Másodrendű homogén lineáris differenciálegyenletek

Az elsőrendű homogén lineáris egyenleteknél már látott bizonyítást alkalmazva a másodrendű esetre kapjuk rögtön az alábbi eredményt.

**2.2. Tétel.** *Legyen  $y_1$  és  $y_2$  megoldása a (2.2) egyenletnek az  $I$  intervallumon. Ekkor  $c_1y_1 + c_2y_2$  is megoldása a (2.2) egyenletnek az  $I$  intervallumon minden  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ -re (vagy  $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ -re), azaz a (2.2) egyenlet megoldásainak halmaza lineáris tér.*

**2.3. Definíció.** Legyen  $y_1, y_2: I \rightarrow \mathbb{R}$  tetszőleges függvények. A

$$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x)$$

determinánst az  $y_1$  és  $y_2$  függvények *Wronski-determinánsának* hívjuk.

**2.4. Definíció.** Legyen  $y_1, y_2: I \rightarrow \mathbb{R}$  tetszőleges függvények. Azt mondjuk, hogy  $y_1$  és  $y_2$  *lineárisan függetlenek*, ha

$$c_1y_1(x) + c_2y_2(x) = 0, \quad x \in I, \quad (2.4)$$

akkor és csak akkor, ha  $c_1 = c_2 = 0$ . Az  $y_1$  és  $y_2$  függvényeket *lineárisan összefüggőnek* nevezzük, ha nem lineárisan függetlenek.

**2.5. Tétel.** *Az  $y_1, y_2: I \rightarrow \mathbb{R}$  differenciálható függvények lineárisan függetlenek az  $I$  intervallumon, ha létezik olyan  $x_0 \in I$ , hogy  $W(y_1, y_2)(x_0) \neq 0$ . Ha  $y_1$  és  $y_2$  lineárisan összefüggő az  $I$  intervallumon, akkor  $W(y_1, y_2)(x_0) = 0$  minden  $x \in I$ -re.*

**Bizonyítás:** Tegyük fel, hogy az  $y_1$  és  $y_2$  függvényekre (2.4) teljesül. Ekkor deriválva (2.4) mindkét oldalát a

$$c_1 y_1'(x) + c_2 y_2'(x) = 0, \quad x \in I \quad (2.5)$$

egyenletet kapjuk. De ekkor ez a két lineáris egyenlet egy homogén lineáris egyenletrendszert alkot az ismeretlen  $c_1$  és  $c_2$  konstansokra. Ha létezik olyan  $x \in I$ , hogy a  $c_1$  és  $c_2$  együtthatómátrixa invertálható, azaz  $W(y_1, y_2)(x_0) \neq 0$ , akkor csak triviális megoldása van az egyenletrendszernek, azaz  $c_1 = c_2 = 0$  következik. Ha  $y_1$  és  $y_2$  lineárisan összefüggő az  $I$  intervallumon, akkor minden  $x \in I$ -re létezik nemtriviális megoldása a (2.4)-(2.5) lineáris egyenletrendszernek  $c_1$  és  $c_2$ -re, azaz az együtthatómátrix determinánsa 0 minden  $x \in I$ -re.  $\square$

**2.6. Tétel (Abel–Liouville-tétel).** Legyen  $y_1$  és  $y_2$  megoldása a (2.2) egyenletnek az  $I$  intervallumon. Ekkor

$$W(y_1, y_2)(x) = c \exp\left(-\int p(x) dx\right), \quad x \in I$$

valamely  $c \in \mathbb{R}$ -re.

**Bizonyítás:** Deriváljuk a Wronski-determinánst, és használjuk a (2.2) egyenletet:

$$\begin{aligned} W(y_1, y_2)'(x) &= \left(y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x)\right)' \\ &= y_1'(x)y_2'(x) + y_1(x)y_2''(x) - y_2'(x)y_1'(x) - y_2(x)y_1''(x) \\ &= y_1(x)\left(-p(x)y_2'(x) - q(x)y_2(x)\right) - y_2(x)\left(-p(x)y_1'(x) - q(x)y_1(x)\right) \\ &= -p(x)\left(y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x)\right) \\ &= -p(x)W(y_1, y_2)(x). \end{aligned}$$

Azaz a Wronski-determináns teljesíti az

$$y' = -p(x)y$$

elsőrendű homogén lineáris egyenletet. Ebből következik a tétel állítása.  $\square$

**2.7. Következmény.** Legyen  $y_1$  és  $y_2$  megoldása a (2.2) egyenletnek az  $I$  intervallumon. Ekkor vagy  $W(y_1, y_2)(x) = 0$  minden  $x \in I$ -re vagy  $W(y_1, y_2)(x) \neq 0$  minden  $x \in I$ -re.

**2.8. Definíció.** Az  $y_1, y_2: I \rightarrow \mathbb{R}$  függvényeket a (2.2) egyenlet fundamentális megoldásának vagy alaprendszerének hívjuk, ha  $y_1$  és  $y_2$  megoldása a (2.2) egyenletnek, és  $y_1$  és  $y_2$  lineárisan függetlenek  $I$ -n, azaz  $W(y_1, y_2)(x) \neq 0$ , ha  $x \in I$ .

**2.9. Tétel.** Legyen  $y_1$  és  $y_2$  fundamentális megoldása a (2.2) egyenletnek az  $I$  intervallumon. Ekkor bármely  $y_0, y_0'$  kezdeti feltételhez létezik olyan  $c_1$  és  $c_2$ , hogy  $c_1 y_1 + c_2 y_2$  teljesíti a (2.3) kezdeti feltételeket.

**Bizonyítás:** A 2.2 tétel szerint tetszőleges  $c_1$  és  $c_2$  konstantra  $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$  megoldása a (2.2) egyenletnek. Elegendő tehát  $c_1$  és  $c_2$ -t úgy megválasztani a fenti lineáris kombinációban, hogy a (2.3) kezdeti feltétel, azaz

$$\begin{aligned} c_1 y(x_0) + c_2 y_2(x_0) &= y_0 \\ c_1 y'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) &= y_0' \end{aligned}$$

teljesüljön. Mivel a feltétel szerint  $W(y_1, y_2)(x_0) \neq 0$ , az együtthatómátrix invertálható, így a lineáris egyenletrendszernek létezik megoldása  $c_1$  és  $c_2$ -re.  $\square$

**2.10. Következmény.** A (2.2) egyenlet megoldásainak halmaza kétdimenziós lineáris tér.

## 2.2. Konstans együtthatós másodrendű homogén lineáris differenciálegyenletek

Tekintsük a (2.2) egyenlet konstans együtthatós megfelelőjét. Legyen  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$ .

$$ay'' + by' + cy = 0, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.6)$$

Keressük a (2.6) megoldását az  $y(x) = e^{\lambda x}$  alakban, ahol  $\lambda$  valós (vagy komplex) konstans. Ekkor az  $y'(x) = \lambda e^{\lambda x}$  és  $y''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x}$  képleteket behelyettesítve a (2.6) egyenletbe kapjuk az

$$a\lambda^2 e^{\lambda x} + b\lambda e^{\lambda x} + ce^{\lambda x} = 0$$

egyenletet, amely pontosan akkor teljesül, ha  $\lambda$  megoldása az

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \quad (2.7)$$

algebrai egyenletnek. A (2.7) egyenletet a (2.6) differenciálegyenlet *karakterisztikus egyenletének* nevezzük.

Három esetet különböztetünk meg:

**1. eset:** A (2.7) karakterisztikus egyenletnek két különböző valós gyöke van:  $\lambda_1$  és  $\lambda_2$ . Ekkor a (2.6) egyenlet általános megoldása

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.8)$$

Ehhez csak azt kell ellenőrizni, hogy  $y_1 = e^{\lambda_1 x}$  és  $y_2 = e^{\lambda_2 x}$  lineárisan független megoldások.

$$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{vmatrix} = (\lambda_2 - \lambda_1) e^{(\lambda_1 + \lambda_2)x} \neq 0,$$

mivel  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , így  $y_1$  és  $y_2$  valóban lineárisan függetlenek.

**2. eset:** A (2.7) karakterisztikus egyenletnek egy darab (kétszeres) valós gyöke van,  $\lambda_0$ . Ez akkor teljesül, ha  $b^2 - 4ac = 0$ , és ekkor

$$\lambda_0 = -\frac{b}{2a}.$$

Megmutatjuk, hogy az  $y_1 = e^{\lambda_0 x}$  megoldáson kívül az  $y_2 = x e^{\lambda_0 x}$  függvény is megoldása az egyenletnek.  $y_2' = e^{\lambda_0 x} + \lambda_0 x e^{\lambda_0 x}$  és  $y_2'' = 2\lambda_0 e^{\lambda_0 x} + \lambda_0^2 x e^{\lambda_0 x}$ , így ezeket behelyettesítve a (2.6) egyenletbe kapjuk:

$$a(2\lambda_0 e^{\lambda_0 x} + \lambda_0^2 x e^{\lambda_0 x}) + b(e^{\lambda_0 x} + \lambda_0 x e^{\lambda_0 x}) + c x e^{\lambda_0 x} = (a\lambda_0^2 + b\lambda_0 + c)x e^{\lambda_0 x} + (2a\lambda_0 + b)e^{\lambda_0 x} = 0.$$

Másrész  $y_1$  és  $y_2$  lineárisan független, mivel

$$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_0 x} & x e^{\lambda_0 x} \\ \lambda_0 e^{\lambda_0 x} & e^{\lambda_0 x} + \lambda_0 x e^{\lambda_0 x} \end{vmatrix} = (1 + \lambda_0 x - \lambda_0 x) e^{2\lambda_0 x} = e^{2\lambda_0 x} \neq 0.$$

Ezért ebben az esetben a (2.6) egyenlet általános megoldásának képlete:

$$y = c_1 e^{\lambda_0 x} + c_2 x e^{\lambda_0 x}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.9)$$

**3. eset:** A (2.7) karakterisztikus egyenletnek két komplex gyöke van,  $\lambda_1 = \alpha + i\beta$  és a konjugáltja,  $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ . Ekkor természetesen  $\tilde{y}_1(x) = e^{\lambda_1 x}$  és  $\tilde{y}_2(x) = e^{\lambda_2 x}$  megoldásai a (2.6) egyenletnek, viszont ezek komplex értékű függvények, mivel

$$\tilde{y}_1(x) = e^{\lambda_1 x} = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \sin \beta x),$$

és hasonlóan,

$$\tilde{y}_2(x) = e^{\lambda_2 x} = e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos(-\beta x) + i \sin(-\beta x)) = e^{\alpha x}(\cos \beta x - i \sin \beta x).$$

De ekkor az

$$y_1(x) = \frac{1}{2}(\tilde{y}_1(x) + \tilde{y}_2(x)) = e^{\alpha x} \cos \beta x$$

és az

$$y_2(x) = \frac{1}{2i}(\tilde{y}_1(x) - \tilde{y}_2(x)) = e^{\alpha x} \sin \beta x$$

függvények is megoldásai a (2.6) egyenletnek, és ezek már valós értékű függvények. Megmutatjuk, hogy  $y_1$  és  $y_2$  lineárisan függetlenek:

$$\begin{aligned} W(y_1, y_2)(x) &= \begin{vmatrix} e^{\alpha x} \cos \beta x & e^{\alpha x} \sin \beta x \\ \alpha e^{\alpha x} \cos \beta x - \beta e^{\alpha x} \sin \beta x & \alpha e^{\alpha x} \sin \beta x + \beta e^{\alpha x} \cos \beta x \end{vmatrix} \\ &= e^{2\alpha x}(\alpha \cos \beta x \sin \beta x + \beta \cos^2 \beta x - \alpha \cos \beta x \sin \beta x + \beta \sin^2 \beta x) \\ &= e^{2\alpha x} \beta \\ &\neq 0, \end{aligned}$$

mivel  $\beta \neq 0$ . Ezért ebben az esetben a (2.6) differenciálegyenlet általános megoldásának képlete:

$$y = c_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + c_2 e^{\alpha x} \sin \beta x, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.10)$$

**2.11. Példa.** Oldjuk meg az

$$y'' + y' - 6y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$$

kezdeti érték feladatot! Az egyenlet karakterisztikus egyenlete:

$$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0,$$

amelynek megoldása  $\lambda_1 = 3$  és  $\lambda_2 = -2$ . Ezért az egyenlet általános megoldása

$$y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-2x}.$$

A kezdeti feltételek meghatározzák a  $c_1$  és  $c_2$  értékét. Ehhez először tekintsük a megoldás deriváltját:  $y' = 3c_1 e^{3x} - 2c_2 e^{-2x}$ . Behelyettesítve a megoldás ill. deriváltjának képletébe  $x = 0$ -t és használva a megadott kezdeti feltételeket teljesül a

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 1 \\ 3c_1 - 2c_2 &= 2 \end{aligned}$$

egyenletrendszer, amelyet megoldva kapjuk, hogy  $c_1 = 4/5$  és  $c_2 = 1/5$ . Ezért a kezdeti érték feladat megoldása

$$y = \frac{4}{5}e^{3x} + \frac{1}{5}e^{-2x}.$$

□

**2.12. Példa.** Oldjuk meg a

$$4y'' + 12y' + 9y = 0, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 0$$

kezdeti érték feladatot! Az egyenlet karakterisztikus egyenlete:

$$4\lambda^2 + 12\lambda + 9 = 0,$$

amelynek megoldása  $\lambda_0 = -3/2$  kétszeres gyök. Az egyenlet általános megoldása tehát

$$y = c_1 e^{-\frac{3}{2}x} + c_2 x e^{-\frac{3}{2}x}.$$

A megoldás deriváltja  $y' = -\frac{3}{2}c_1 e^{-\frac{3}{2}x} + c_2 e^{-\frac{3}{2}x} - \frac{3}{2}c_2 x e^{-\frac{3}{2}x}$ . A kezdeti feltételeket használva kapjuk a

$$\begin{aligned} c_1 &= -1 \\ -\frac{3}{2}c_1 + c_2 &= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszert, és így  $c_1 = -1$  és  $c_2 = -\frac{3}{2}$ , azaz a kezdeti érték feladat megoldása

$$y = -e^{-\frac{3}{2}x} - \frac{3}{2}x e^{-\frac{3}{2}x}.$$

□

**2.13. Példa.** Oldjuk meg az

$$y'' - 2y' + 8y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -2$$

kezdeti érték feladatot! Az egyenlet karakterisztikus egyenlete:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 8 = 0,$$

amelynek megoldása  $\lambda = 1 \pm i\sqrt{7}$ , tehát az egyenlet általános megoldása

$$y = c_1 e^x \cos \sqrt{7}x + c_2 e^x \sin \sqrt{7}x.$$

Számítsuk ki először  $y'$ -t:

$$y' = c_1 e^x \cos \sqrt{7}x - \sqrt{7}c_1 e^x \sin \sqrt{7}x + c_2 e^x \sin \sqrt{7}x + \sqrt{7}c_2 e^x \cos \sqrt{7}x.$$

A kezdeti feltételeket használva kapjuk a

$$\begin{aligned} c_1 &= 1 \\ c_1 + \sqrt{7}c_2 &= -2 \end{aligned}$$

egyenletrendszert, és így  $c_1 = 1$  és  $c_2 = -\frac{3}{\sqrt{7}}$ , azaz a kezdeti érték feladat megoldása

$$y = e^x \cos \sqrt{7}x - \frac{3}{\sqrt{7}}e^x \sin \sqrt{7}x.$$

□

### 2.3. Másodrendű inhomogén lineáris differenciálegyenletek

Tekintsük újra az

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \quad x \in I \quad (2.11)$$

másodrendű inhomogén lineáris differenciálegyenletet és a hozzá tartozó

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad x \in I. \quad (2.12)$$

homogén lineáris differenciálegyenletet.

Ahogy elsőrendű lineáris differenciálegyenleteknél láttuk, most is könnyen igazolhatók az alábbi állítások:

**2.14. Tétel.** *Legyen  $y_1$  és  $y_2$  a (2.11) inhomogén egyenlet két tetszőleges megoldása. Ekkor az  $y = y_1 - y_2$  függvény megoldása a (2.12) homogén egyenletnek.*

**2.15. Tétel.** *Legyen  $y_H$  a (2.12) homogén egyenlet általános megoldása, és  $y_{IP}$  a (2.12) inhomogén egyenlet egy partikuláris (rögzített) megoldása. Ekkor a (2.12) inhomogén egyenlet általános megoldásának képlete*

$$y_{IH} = y_H + y_{IP}.$$

Inhomogén differenciálegyenletek megoldását két lépésben kaphatjuk meg: kiszámítjuk a megfelelő homogén egyenlet általános megoldását, és az inhomogén egyenlet egy megoldását elegendő megtalálnunk. Partikuláris megoldás meghatározásával a következő két szakaszban foglalkozunk.

### 2.4. Konstans együtthatós másodrendű inhomogén lineáris differenciálegyenletek megoldása próbafüggvény módszerével

**2.16. Példa.** Oldjuk meg az

$$y'' + 3y' - 10y = 4e^{3x} \quad (2.13)$$

inhomogén egyenletet! A 2.15. Tétel értelmében elegendő a megfelelő homogén egyenlet általános megoldását és az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását megkeresni.

Oldjuk meg először az  $y'' + 3y' - 10y = 0$  homogén egyenletet! A karakterisztikus egyenlete  $\lambda^2 + 3\lambda - 10 = 0$ , amelynek gyökei  $\lambda_1 = -5$  és  $\lambda_2 = 2$ . Ezért a homogén egyenlet általános megoldása

$$y_H = c_1 e^{-5x} + c_2 e^{2x}.$$

Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását olyan alakban keressük, amelyet a (2.13) egyenlet bal oldalába behelyettesítve  $4e^{3x}$ -et kapunk. Erre természetes ötlet az

$$y_{IP} = Ae^{3x}$$

alak. Számítsuk ki ennek deriváltjait:  $y'_{IP} = 3Ae^{3x}$  és  $y''_{IP} = 9Ae^{3x}$ . Ezeket behelyettesítve a (2.13) egyenletbe

$$9Ae^{3x} + 9Ae^{3x} - 10Ae^{3x} = 4Ae^{3x}.$$

Akkor kapunk azonosságot, ha a két oldalon az exponenciális függvény együtthatói megegyeznek, azaz  $8A = 4$ , tehát  $A = 1/2$ . A (2.13) egyenlet egy lehetséges partikuláris megoldása tehát  $y_{IP} = \frac{1}{2}e^{3x}$ . Az egyenlet általános megoldása ezért

$$y = c_1 e^{-5x} + c_2 e^{2x} + \frac{1}{2}e^{3x}.$$

□

**2.17. Példa.** Oldjuk meg az

$$y'' + 3y' - 10y = -2 \cos 2x \quad (2.14)$$

inhomogén egyenletet!

Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását keressük most az

$$y_{IP} = A \cos 2x + B \sin 2x$$

alakban. Ekkor  $y'_{IP} = -2A \sin 2x + 2B \cos 2x$  és  $y''_{IP} = -4A \cos 2x - 4B \sin 2x$ . Ezeket behelyettesítve a (2.14) egyenletbe kapjuk

$$-4A \cos 2x - 4B \sin 2x - 6A \sin 2x + 6B \cos 2x - 10A \cos 2x - 10B \sin 2x = -2 \cos 2x,$$

amit egyszerűsítve

$$(-6A - 14B) \sin 2x + (6B - 14A) \cos 2x = -2 \cos 2x.$$

Ez pontosan akkor lesz azonosság, ha az azonos függvények együtthatói az egyenlet két oldalán megegyeznek, azaz

$$\begin{aligned} -6A - 14B &= 0 \\ -14A + 6B &= -2 \end{aligned}$$

Ezt megoldva  $A = 7/58$  és  $B = -3/58$ , azaz az egyenlet általános megoldása

$$y = c_1 e^{-5x} + c_2 e^{2x} + \frac{7}{58} \cos 2x - \frac{3}{58} \sin 2x.$$

□

**2.18. Példa.** Oldjuk meg az

$$y'' + 3y' - 10y = 4x^2 - x$$

inhomogén egyenletet!

Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását keressük most az

$$y_{IP} = Ax^2 + Bx + C$$

alakban. Ekkor  $y'_{IP} = 2Ax + B$  és  $y''_{IP} = 2A$ . Ezeket behelyettesítve az egyenletbe kapjuk

$$2A + 6Ax + 3B - 10Ax^2 - 10Bx - 10C = 4x^2 - x,$$

amit átrendezve

$$-10Ax^2 + (6A - 10B)x + 2A + 3B - 10C = 4x^2 - x.$$

Az együtthatókat a két oldalon egyenlővé téve adódik a

$$\begin{aligned} -10A &= 4 \\ 6A - 10B &= -1 \\ 2A + 3B - 10C &= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszer, amelyet megoldva  $A = -2/5$ ,  $B = -7/50$  és  $C = -61/500$ . Ezért az egyenlet általános megoldása

$$y = c_1 e^{-5x} + c_2 e^{2x} - \frac{2}{5}x^2 - \frac{7}{50}x - \frac{61}{500}.$$

□

**2.19. Példa.** Oldjuk meg az

$$y'' + 3y' - 10y = 5e^{3x} \sin 2x$$

inhomogén egyenletet!

Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását keressük most az

$$y_{IP} = e^{3x}(A \cos 2x + B \sin 2x)$$

alakban. Ekkor

$$y'_{IP} = 3Ae^{3x} \cos 2x - 2Ae^{3x} \sin 2x + 3Be^{3x} \sin 2x + 2Be^{3x} \cos 2x$$

és

$$y''_{IP} = 5Ae^{3x} \cos 2x - 12Ae^{3x} \sin 2x + 5Be^{3x} \sin 2x + 12Be^{3x} \cos 2x.$$

Ezeket behelyettesítve az egyenletbe és a kapott egyenlet két oldalán az azonos függvények együtthatóit összehasonlítva kis számolás után kapjuk

$$\begin{aligned} 4A + 18B &= 0 \\ -18A + 4B &= 5 \end{aligned}$$

Ezt megoldva  $A = -9/34$  és  $B = 1/17$ . Az egyenlet általános megoldása tehát

$$y = c_1 e^{-5x} + c_2 e^{2x} - \frac{9}{34} e^{3x} \cos 2x + \frac{1}{17} e^{3x} \sin 2x.$$

□

**2.20. Példa.** Oldjuk meg az

$$y'' + 3y' - 10y = -4e^{2x} \tag{2.15}$$

inhomogén egyenletet!

Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását keressük most is az  $y_{IP} = Ae^{2x}$  alakban, mint a 2.16. Példában. Ekkor az  $y'_{IP} = 2Ae^{2x}$  és  $y''_{IP} = 4Ae^{2x}$  deriváltakat visszahelyettesítve a (2.15) egyenletbe

$$4Ae^{2x} + 6Ae^{2x} - 10Ae^{2x} = -4e^{2x},$$

következik, ami ellentmondás, azaz nincs ilyen alakú partikuláris megoldása az egyenletnek. Ezt előre lehetett volna látni, mivel  $e^{2x}$  megoldása a homogén egyenletnek. Módosítani kell tehát a próbafüggvény alakját. A következő próbálkozás legyen az  $y_{IP} = Axe^{2x}$  függvény, mivel ez hasonlít a legjobban az egyenlet jobb oldalára. Ekkor  $y'_{IP} = Ae^{2x} + 2Axe^{2x}$  és  $y''_{IP} = 4Ae^{2x} + 4Axe^{2x}$ , és ezért visszahelyettesítéskor megjelenik az egyenlet bal oldalán az  $e^{2x}$  függvény:

$$4Ae^{2x} + 4Axe^{2x} + 3Ae^{2x} + 6Axe^{2x} - 10Axe^{2x} = -4e^{2x},$$

azaz egyszerűsítve,

$$7Ae^{2x} = -4e^{2x},$$

és így  $A = -4/7$ . Az egyenlet általános megoldása tehát

$$y = c_1 e^{-5x} + c_2 e^{2x} - \frac{4}{7} x e^{2x}.$$

□



$f(x)$	$y_{IP}$
$ae^{\alpha x}$	$Ae^{\alpha x}x^s \ (s = 0, 1, 2)$
$a \cos \beta x + b \sin \beta x$	$(A \cos \beta x + B \sin \beta x)x^s \ (s = 0, 1, 2)$
$a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$	$(A_n x^n + \dots + A_1 x + A_0)x^s \ (s = 0, 1, 2)$

## 2.1. Táblázat. Próbafüggvények

Az eddigi példák alapján látható, hogy ha az

$$ay'' + by' + cy = f(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

egyenlet jobb oldalán szereplő függvény speciális alakú: exponenciális, polinom vagy trigonometrikus függvény, akkor a próbafüggvényt a 2.1. Táblázat szerint választhatjuk.

Itt az  $A, B, A_n, \dots, A_0$  konstansok a jobb oldali oszlopban szereplő képletekben ismeretlen együtthatók, és először a képletet az  $s = 0$  kitevővel próbáljuk. (A módszert a *határozatlan együtthatók módszerének* is nevezik.) A 2.20. Példában látott eset általánosításaként azt kapjuk, hogy ha a próbafüggvényben szereplő függvény (vagy annak bizonyos paraméter választással kapható része) megoldása a homogén egyenletnek, akkor a próbafüggvény képletét  $x$ -szel beszorozva próbáljuk ki, azaz a táblázatban az  $s = 1$  választással használjuk a jobb oldali képletet. Ha még ekkor sem kapunk megoldást, azaz az így felírt képlet is még megoldása a homogén egyenletnek, akkor  $x$  helyett  $x^2$ -tel szorozzuk a képletet, azaz az  $s = 2$  kitevőt választjuk a fenti táblázatban. Belátható, hogy a táblázatban szereplő esetekben a kapott próbafüggvény mindig működik, azaz egyértelműen meghatározhatók az együtthatók.

A 2.19. Példa esetét általánosítva belátható, hogy a próbafüggvény módszere akkor is működik, ha  $f(x)$  nem a fenti táblázatban szereplő exponenciális, trigonometrikus vagy polinom függvény, hanem bármely két ilyen alakú függvény, vagy akár három ilyen alakú függvény szorzata. Ekkor a próbafüggvényt választhatjuk a jobb oldali oszlopban levő megfelelő képletek szorzataként (vigyázva arra, hogy felesleges konstansokat ne vezessünk be a képletbe).

**2.21. Tétel (szuperpozíció elve).** Legyen  $y_1$  és  $y_2$  megoldása az

$$y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1 = f_1(x), \quad x \in I,$$

illetve az

$$y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2 = f_2(x), \quad x \in I$$

egyenleteknek, akkor  $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$  megoldása az

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x) + f_2(x), \quad x \in I$$

egyenletnek.

**Bizonyítás:** Az  $y = y_1 + y_2$  behelyettesítéssel kapjuk:

$$\begin{aligned} y'' + p(x)y' + q(x)y &= (y_1 + y_2)'' + p(x)(y_1 + y_2)' + q(x)(y_1 + y_2) \\ &= y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1 + y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2 \\ &= f_1(x) + f_2(x). \end{aligned}$$

□

**2.22. Példa.** Oldjuk meg az

$$y'' + 3y' - 10y = 4e^{3x} - 2 \cos 2x + 4x^2 - x - 4e^{2x}$$

inhomogén egyenletet! Mivel korábbi példákban megoldottuk azokat az inhomogén egyenleteket, ahol a jobb oldalon külön-külön állnak a fenti függvények, így rögtön kapjuk a 2.21. Tételt alkalmazva, hogy az egyenlet általános megoldása:

$$y = c_1 e^{-5x} + c_2 e^{2x} + \frac{1}{2} e^{3x} + \frac{7}{58} \cos 2x - \frac{3}{58} \sin 2x - \frac{2}{5} x^2 - \frac{7}{50} x - \frac{61}{500} - \frac{4}{7} x e^{2x}.$$

□

## 2.5. Másodrendű inhomogén lineáris differenciálegyenletek megoldása konstansok variálásának módszerével

Tekintsük az

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \quad x \in I \quad (2.16)$$

inhomogén egyenletet. Tegyük fel, hogy az

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad x \in I \quad (2.17)$$

homogén egyenletnek ismert az  $y_1, y_2$  fundamentális megoldása, azaz a homogén egyenlet általános megoldása

$$y_H = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x).$$

Próbáljuk meg a konstansok helyett

$$y_{IP} = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$$

alakban keresni az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását. Ez a *konstansok variálásának a módszere*. Ekkor

$$y'_{IP} = u'_1(x)y_1(x) + u_1(x)y'_1(x) + u'_2(x)y_2(x) + u_2(x)y'_2(x).$$

Ha ezt még egyszer deriváljuk és behelyettesítjük a (2.16) egyenletbe, akkor a két ismeretlen  $u_1$  és  $u_2$  függvényre csak egy egyenletünk van, ami nem határozza meg egyértelműen a függvényeket. Követeljük meg azt is, hogy

$$u'_1(x)y_1(x) + u'_2(x)y_2(x) = 0, \quad x \in I \quad (2.18)$$

is teljesüljön, ez egyszerűsíti a további számolást. Ugyanis ekkor

$$y'_{IP} = u_1(x)y'_1(x) + u_2(x)y'_2(x),$$

és ezért

$$y''_{IP} = u'_1(x)y'_1(x) + u_1(x)y''_1(x) + u'_2(x)y'_2(x) + u_2(x)y''_2(x).$$

Ezért, behelyettesítve a (2.16) egyenlet bal oldalába kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} & u'_1(x)y'_1(x) + u_1(x)y''_1(x) + u'_2(x)y'_2(x) + u_2(x)y''_2(x) \\ & \quad + p(x)(u_1(x)y'_1(x) + u_2(x)y'_2(x)) + q(x)(u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)) \\ & = u_1(x)(y''_1(x) + p(x)y'_1(x) + q(x)y_1(x)) + u_2(x)(y''_2(x) + p(x)y'_2(x) + q(x)y_2(x)) \\ & \quad + u'_1(x)y'_1(x) + u'_2(x)y'_2(x) \\ & = u'_1(x)y'_1(x) + u'_2(x)y'_2(x). \end{aligned}$$

Ezért a (2.18) egyenlettel együtt  $u_1$  és  $u_2$  teljesíti az

$$u_1'(x)y_1(x) + u_2'(x)y_2(x) = 0 \quad (2.19)$$

$$u_1'(x)y_1'(x) + u_2'(x)y_2'(x) = f(x) \quad (2.20)$$

egyenletrendszer. Ez  $u_1'$  és  $u_2'$ -re nézve lineáris egyenletrendszer, amely mindig megoldható  $I$ -n, mivel az együtthatómátrix determinánsa  $W(y_1, y_2)(x) \neq 0$ . Ezután integrálással megkapjuk  $u_1$  és  $u_2$  képletét.

**2.23. Példa.** Könnyen ellenőrizhető, hogy az

$$x^2 y'' + 6xy' + 6y = 0, \quad (x > 0)$$

egyenlet általános megoldása

$$y_H = \frac{c_1}{x^2} + \frac{c_2}{x^3}.$$

Ezt felhasználva oldjuk meg az

$$x^2 y'' + 6xy' + 6y = x, \quad (x > 0)$$

egyenletet! A konstansok variálásának módszerét használva keressük az egyenlet partikuláris megoldását az

$$y_{IP} = \frac{u_1}{x^2} + \frac{u_2}{x^3}$$

alakban, ahol  $u_1$  és  $u_2$  ismeretlen függvények. Először osszuk el az egyenletet  $x^2$ -tel, hogy a (2.16) alakra hozzuk:

$$y'' + \frac{6}{x}y' + \frac{6}{x^2}y = \frac{1}{x}.$$

Ekkor a (2.19)-(2.20) egyenletrendszerre erre a feladatra felírva kapjuk:

$$\begin{aligned} \frac{u_1'}{x^2} + \frac{u_2'}{x^3} &= 0 \\ -2\frac{u_1'}{x^3} - 3\frac{u_2'}{x^4} &= \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Ezt végigszámolva kapjuk, hogy  $u_1' = x^2$  és  $u_2' = -x^3$ , így  $u_1 = \int x^2 dx = x^3/3$  és  $u_2 = -\int x^3 dx = -x^4/4$ . Megjegyezzük, hogy itt elhagytuk az integrálási konstansokat, hiszen egy-egy konkrét  $u_1$  és  $u_2$ -re van csak szükségünk. Ezért

$$y_{IP} = \frac{x^3}{3} \frac{1}{x^2} - \frac{x^4}{4} \frac{1}{x^3} = \frac{1}{12}x,$$

tehát az inhomogén egyenlet általános megoldása

$$y = \frac{c_1}{x^2} + \frac{c_2}{x^3} + \frac{1}{12}x, \quad x > 0.$$

□

## 2.6. Rangcsökkentés módszere másodrendű homogén lineáris egyenlet második megoldásának keresésére

Tekintsük az

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad x \in I \quad (2.21)$$

homogén lineáris egyenletet. Tegyük fel, hogy az egyenlet egy  $y_1$  megoldása ismert. Ekkor természetesen  $cy_1$  is megoldása az egyenletnek minden  $c \in \mathbb{R}$ -re, de ez nem lesz lineárisan független  $y_1$ -től. Keressünk egy másik megoldást az

$$y_2(x) = u(x)y_1(x)$$

alakban. Ha  $u$  nem konstans, akkor  $y_2$  és  $y_1$  lineárisan független lesz. Ekkor  $y_2'(x) = u'(x)y_1(x) + u(x)y_1'(x)$  és  $y_2''(x) = u''(x)y_1(x) + 2u'(x)y_1'(x) + u(x)y_1''(x)$ , ezt visszahelyettesítve a (2.21) egyenletbe

$$u''(x)y_1(x) + 2u'(x)y_1'(x) + u(x)y_1''(x) + p(x)(u'(x)y_1(x) + u(x)y_1'(x)) + q(x)u(x)y_1(x) = 0.$$

Rendezzük át az egyenletet:

$$u''(x)y_1(x) + u'(x)(2y_1'(x) + p(x)y_1(x)) + u(x)(y_1''(x) + p(x)y_1'(x) + q(x)y_1(x)) = 0.$$

Mivel  $y_1$  megoldása a (2.21) egyenletnek, ezért

$$u''(x)y_1(x) + u'(x)(2y_1'(x) + p(x)y_1(x)) = 0.$$

Ebben az egyenletben már nincs  $u$ -s tag, így ezt az egyenletet a

$$v(x) = u'(x)$$

helyettesítéssel visszavezethetjük a

$$v'(x)y_1(x) + v(x)(2y_1'(x) + p(x)y_1(x)) = 0$$

elsőrendű homogén lineáris differenciálegyenlet megoldására, (amely egyben szétválasztható típusú is), így megoldható  $v$ -re. Ezután integrálással  $u$  is meghatározható. Ezt az eljárást *rangcsökkentés módszerének* nevezzük, mivel a másodrendű lineáris egyenlet megoldását a fenti helyettesítés elsőrendű lineáris egyenlet megoldására vezeti vissza.

### 2.24. Példa. Ellenőrizhető, hogy az

$$xy'' - y' - x^3y = 0, \quad (x > 0)$$

egyenlet egy megoldása  $y_1(x) = e^{x^2/2}$ . Adjuk meg az egyenlet általános megoldását!

A rangcsökkentés módszerét alkalmazva keressük a második megoldást az  $y_2(x) = u(x)e^{x^2/2}$  alakban. Ekkor  $y_2'(x) = u'(x)e^{x^2/2} + xu(x)e^{x^2/2}$  és  $y_2''(x) = u''(x)e^{x^2/2} + 2xu'(x)e^{x^2/2} + u(x)e^{x^2/2} + x^2u(x)e^{x^2/2}$ , ezért

$$xu''(x)e^{x^2/2} + 2x^2u'(x)e^{x^2/2} + xu(x)e^{x^2/2} + x^3u(x)e^{x^2/2} - u'(x)e^{x^2/2} - xu(x)e^{x^2/2} - x^3u(x)e^{x^2/2} = 0,$$

azaz

$$xu''(x) + (2x^2 - 1)u'(x) = 0.$$

A  $v(x) = u'(x)$  helyettesítéssel kapjuk, hogy

$$xv'(x) + (2x^2 - 1)v(x) = 0,$$

amelynek egy megoldása  $x > 0$ -ra

$$v(x) = e^{-\int(2x-1/x) dx} = e^{-x^2+\ln x} = xe^{-x^2}.$$

(Nem kell az összes megoldást megkeresnünk, mivel egy lehetséges  $u$ -t keresünk, így az integrálásakor elhagyjuk a  $+c$ -t.) Ekkor

$$u(x) = \int v(x) dx = \int xe^{-x^2} dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2}.$$

Ezért

$$y_2(x) = -\frac{1}{2}e^{-x^2} e^{x^2/2} = -\frac{1}{2}e^{-x^2/2}$$

egy megoldása a (2.21) egyenletnek, de ekkor

$$y_2(x) = e^{-x^2/2}$$

is megoldása lesz az egyenletnek. Az  $y_1$  és  $y_2$  függvények lineáris függetlenségét a Wronski-determinánst kiszámítva is ellenőrizhetjük:

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{x^2/2} & e^{-x^2/2} \\ xe^{x^2/2} & -xe^{-x^2/2} \end{vmatrix} = -2x,$$

ami nem azonosan nulla. Kaptuk tehát, hogy az egyenlet általános megoldása

$$y = c_1e^{x^2/2} + c_2e^{-x^2/2}.$$

Behelyettesítéssel ellenőrizhető, hogy ez a képlet minden  $x \in \mathbb{R}$ -re megoldása a (2.21) egyenletnek. □

## 2.7. Euler-egyenlet

Legyen  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$ . Az

$$ax^2y'' + bxy' + cy = 0 \tag{2.22}$$

alakú, nem konstans együtthatós másodrendű homogén lineáris egyenletet *Euler-egyenletnek* nevezzük.

Keressünk

$$y(x) = x^r$$

alakú megoldását a (2.22) egyenletnek. Ekkor  $y' = rx^{r-1}$  és  $y'' = r(r-1)x^{r-2}$ , ezért visszahe-lyettesítéssel az egyenletbe kapjuk

$$ar(r-1)x^r + brx^r + cx^r = 0,$$

ami pontosan akkor teljesül, ha  $r$  teljesíti az

$$ar(r-1) + br + c = 0 \tag{2.23}$$

algebrai egyenletet, amelyet a (2.22) egyenlet *karakterisztikus egyenletének* hívjuk. Az egyenlet  $r_1$  és  $r_2$  megoldásait a (2.22) egyenlet *karakterisztikus gyökének* hívjuk. A (2.23) egyenlet átrendezhető az

$$ar^2 + (b-a)r + c = 0$$

alakba.

Három esetet különböztetünk meg:

**1. eset:** A (2.22) egyenletnek két különböző valós gyöke van:  $r_1$  és  $r_2$ . Ekkor  $y_1(x) = x^{r_1}$  és  $y_2(x) = x^{r_2}$  megoldása a (2.22) egyenletnek. Megmutatjuk, hogy  $y_1$  és  $y_2$  lineárisan függetlenek:

$$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} x^{r_1} & x^{r_2} \\ r_1 x^{r_1} & r_2 x^{r_2} \end{vmatrix} = (r_2 - r_1)x^{r_1+r_2} \neq 0.$$

A (2.22) egyenlet általános megoldása ezek szerint

$$y(x) = c_1 x^{r_1} + c_2 x^{r_2}.$$

Ha  $r_1$  vagy  $r_2$  negatív, akkor a megoldás vagy a  $(0, \infty)$  vagy a  $(-\infty, 0)$  intervallumon értelmezhető.

**2. eset:** A (2.22) egyenletnek egy darab kétszeres valós gyöke van:

$$r_0 = \frac{a-b}{2a}.$$

Ekkor  $y_1(x) = x^{r_0}$  megoldása a (2.22) egyenletnek. Keressük az egyenlet másik megoldását a rangcsökkentés módszerét alkalmazva az  $y_2(x) = u(x)x^{r_0}$  alakban. Ekkor  $y_2'(x) = u'(x)x^{r_0} + u(x)r_0x^{r_0-1}$  és  $y_2''(x) = u''(x)x^{r_0} + 2u'(x)r_0x^{r_0-1} + u(x)r_0(r_0-1)x^{r_0-2}$ , ezért

$$\begin{aligned} ax^2(u''(x)x^{r_0} + 2u'(x)r_0x^{r_0-1} + u(x)r_0(r_0-1)x^{r_0-2}) + bx(u'(x)x^{r_0} + u(x)r_0x^{r_0-1}) + cu(x)x^{r_0} \\ = (ax^2u''(x) + 2ar_0xu'(x) + bxu'(x))x^{r_0} + (ar_0(r_0-1) + br_0 + c)u(x)x^{r_0} \\ = (ax^2u''(x) + 2ar_0xu'(x) + bxu'(x))x^{r_0} \\ = 0, \end{aligned}$$

azaz

$$ax^2u''(x) + x(2ar_0 + b)u'(x) = 0.$$

Legyen  $v(x) = u'(x)$ . Mivel  $r_0$  képlete szerint  $2ar_0 + b = a$ , ezért  $v$  megoldása az

$$v'(x) + \frac{1}{x}v(x) = 0$$

egyenletnek, azaz

$$v(x) = e^{-\int \frac{1}{x} dx} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}.$$

Így

$$u(x) = \int v(x) dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln x.$$

Tehát

$$y_2(x) = x^{r_0} \ln x$$

megoldása a (2.22) egyenletnek a  $(0, \infty)$  intervallumon. Számítsuk ki az  $W(y_1, y_2)$  Wronski-determinánst:

$$\begin{aligned} W(y_1, y_2)(x) &= \begin{vmatrix} x^{r_0} & x^{r_0} \ln x \\ r_0 x^{r_0-1} & r_0 x^{r_0-1} \ln x + x^{r_0-1} \end{vmatrix} \\ &= x^{2r_0-1} (r_0 \ln x + 1 - r_0 \ln x) \\ &= x^{2r_0-1} \\ &\neq 0, \quad x > 0. \end{aligned}$$

Kaptuk tehát, hogy ebben az esetben a (2.22) egyenlet általános megoldása

$$y(x) = c_1 x^{r_0} + c_2 x^{r_0} \ln x, \quad x > 0.$$

**3. eset:** A (2.22) egyenletnek két komplex gyöke van:  $r_1 = \alpha + i\beta$  és  $r_2 = \alpha - i\beta$ , ( $\beta \neq 0$ ). Ekkor

$$x^{r_1} = x^{\alpha+i\beta} = x^\alpha x^{i\beta} = x^\alpha e^{i\beta \ln x} = x^\alpha (\cos(\beta \ln x) + i \sin(\beta \ln x))$$

és

$$x^{r_2} = x^{\alpha-i\beta} = x^\alpha (\cos(\beta \ln x) - i \sin(\beta \ln x))$$

komplex megoldásai a (2.22) egyenletnek. Ahogy a konstans együtthatós homogén egyenletek esetében láttuk, itt is kapjuk, hogy a komplex megoldás valós és képzetes része megoldása az a (2.22) egyenletnek, azaz

$$y_1(x) = x^\alpha \cos(\beta \ln x) \quad \text{és} \quad y_2(x) = x^\alpha \sin(\beta \ln x)$$

valós megoldása a (2.22) egyenletnek. Mivel

$$\begin{aligned} W(y_1, y_2)(x) &= \begin{vmatrix} x^\alpha \cos(\beta \ln x) & x^\alpha \sin(\beta \ln x) \\ \alpha x^{\alpha-1} \cos(\beta \ln x) - x^\alpha \sin(\beta \ln x) \frac{\beta}{x} & \alpha x^{\alpha-1} \sin(\beta \ln x) + x^\alpha \cos(\beta \ln x) \frac{\beta}{x} \end{vmatrix} \\ &= x^{2\alpha-1} \left( \alpha \cos(\beta \ln x) \sin(\beta \ln x) + \beta \cos^2(\beta \ln x) \right. \\ &\quad \left. - \alpha \cos(\beta \ln x) \sin(\beta \ln x) + \beta \sin^2(\beta \ln x) \right) \\ &= x^{2\alpha-1} \beta \\ &\neq 0, \quad x > 0. \end{aligned}$$

Kaptuk tehát, hogy a (2.22) egyenlet általános megoldása ebben az esetben

$$y(x) = c_1 x^\alpha \cos(\beta \ln x) + c_2 x^\alpha \sin(\beta \ln x), \quad x > 0.$$

**2.25. Példa.** Adjuk meg a

$$2x^2 y'' - xy' + y = 0, \quad (x > 0), \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = 0$$

kezdeti érték feladat megoldását!

Az egyenlet karakterisztikus egyenlete

$$2r(r-1) - r + 1 = 0,$$

melynek megoldása  $r_1 = \frac{1}{2}$  és  $r_2 = 1$ . Ezért az általános megoldás

$$y(x) = c_1 \sqrt{x} + c_2 x.$$

Mivel  $y'(x) = c_1 \frac{1}{2\sqrt{x}} + c_2$ , ezért a kezdeti feltételeket használva kapjuk

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 2 \\ \frac{1}{2}c_1 + c_2 &= 0. \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer megoldása  $c_1 = 4$  és  $c_2 = -2$ , azaz a kezdeti érték feladat megoldása

$$y(x) = 4\sqrt{x} - 2x, \quad x > 0.$$

□

**2.26. Példa.** Adjuk meg az

$$x^2 y'' + 3xy' + y = 0, \quad (x > 0), \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = -1$$

kezdeti érték feladat megoldását!

Az egyenlet karakterisztikus egyenlete

$$r(r-1) + 3r + 1 = 0,$$

melynek kétszeres gyöke  $r_0 = -1$ . Ezért az általános megoldás

$$y(x) = c_1 \frac{1}{x} + c_2 \frac{1}{x} \ln x.$$

Ebbe a képletbe és az  $y'(x) = -\frac{c_1}{x^2} - \frac{c_2 \ln x}{x^2} + \frac{c_2}{x^2}$  képletbe behelyettesítve a kezdeti feltételeket kapjuk

$$\begin{aligned} c_1 &= 1 \\ -c_1 + c_2 &= -1, \end{aligned}$$

aminek megoldása  $c_1 = 1$  és  $c_2 = 0$ . Ezért

$$y(x) = \frac{1}{x}, \quad x > 0.$$

□

**2.27. Példa.** Adjuk meg az

$$x^2 y'' - 3xy' + 5y = 0, \quad (x > 0), \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = 1$$

kezdeti érték feladat megoldását!

Az egyenlet karakterisztikus egyenlete

$$r(r-1) - 3r + 5 = 0,$$

melynek gyökei  $r_1 = 2 + i$  és  $r_2 = 2 - i$ . Az egyenlet általános megoldása

$$y(x) = c_1 x^2 \cos(\ln x) + c_2 x^2 \sin(\ln x).$$

Mivel  $y'(x) = 2c_1 x \cos(\ln x) - c_1 x \sin(\ln x) + 2c_2 x \sin(\ln x) + c_2 x \cos(\ln x)$ , ezért

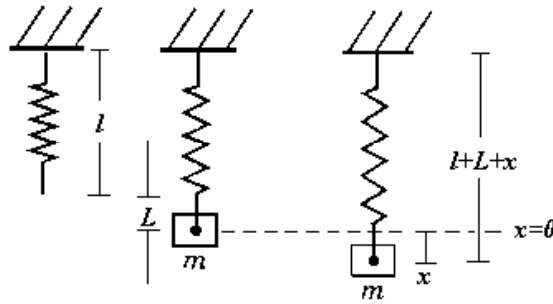
$$\begin{aligned} c_1 &= 2 \\ 2c_1 + c_2 &= 1, \end{aligned}$$

aminek megoldása  $c_1 = 2$  és  $c_2 = -3$ . Ezért

$$y(x) = 2x^2 \cos(\ln x) - 3x^2 \sin(\ln x), \quad x > 0.$$

□





2.1. Ábra. rugós rendszer

## 2.8. Alkalmazások

Előző félévi analízis tanulmányok során — a Laplace-transzformált alkalmazásaként — láttuk, hogy egy soros RLC elektromos áramkör egy konstans együtthatós másodrendű lineáris differenciálegyenlettel modellezhető. Ezt a modellt itt most nem írjuk fel újra, hanem egy mechanikai alkalmazást, rugós rendszereket vizsgálunk részletesen. Ez is konstans együtthatós másodrendű lineáris differenciálegyenletet eredményez, így ugyanazokat a jelenségeket tapasztalhatjuk, amiket az RLC áramkörnél már láttunk.

**2.28. Példa. (rugós rendszer)** Tekintsünk egy függőlegesen felfüggesztett rugót (lásd a 2.2. Ábrát), amelyre egy  $m$  tömegű testet felfüggesztünk. Ezután megnyújtjuk vagy összenyomjuk a rugót, és bizonyos kezdeti sebességet adva a testnek magára hagyjuk, esetleg a mozgás során időtől függő erővel hatunk tovább a testre. Számítsuk ki a test elmozdulását az idő függvényeként!

Válasszunk egy függőleges koordinátarendszert, amelynél a pozitív irány lefele mutat, és ahol az origó a test nyugalmi helyzeténél van (lásd a 2.1. Ábrát). Legyen  $l$  a rugó megnyújtás előtti hossza,  $L$  a rugó megnyúlása a test felakasztása után. Jelölje  $x(t)$  a rugó nyugalmi helyzetéhez viszonyított megnyúlását a  $t$  időpontban. Newton II. törvényét alkalmazzuk a mozgásegyenlet felírásához:  $F = ma$ . A test gyorsulása az elmozdulás idő szerinti második deriváltja:  $a = x''$ . A testre ható erők eredője számításakor négy erőhatást veszünk figyelembe: 1. Az  $mg$  súlyerő mindig lefele, azaz pozitív irányban hat a mozgás során. 2. Az  $F_r$  rugóerő Hooke-törvénye szerint arányos a rugó megnyúlásával. A rugóerő felfele hat, ha a rugót megnyújtjuk, ha pedig összenyomjuk, akkor lefele hat. Mivel a rugó teljes megnyúlása  $L + x$ , ezért tehát a rugóerő képlete  $F_r = -k(L + x)$ , ahol  $k > 0$  az ún. rugóállandó. 3. Az  $F_s$  közegellenállási erő vagy surlódási erő mindig a mozgás irányával ellentétes irányban hat. Egy a legtöbb közegben illetve nem túl nagy sebességnél megfigyelt kísérleti tapasztalat szerint a közegellenállási erő arányos a sebesség nagyságával. Ezért  $F_s = -\gamma x'$ , ahol  $\gamma > 0$  a surlódási együttható. 4. A testre ható egyéb külső erőt jelölje  $f(t)$ . Ekkor Newton II. törvényébe behelyettesítve kapjuk az

$$mx'' = mg - k(L + x) - \gamma x' + f(t)$$

egyenletet. A test rugóhoz illesztése után a rugóerő és a súlyerő kiegyenlíti egymást, azaz  $mg = kL$ . Ezt használva a mozgásegyenlet átalakítható az

$$mx'' + \gamma x' + kx = f(t) \quad (2.24)$$

alakba. Ez egy konstans együtthatós másodrendű lineáris differenciálegyenlet. A hozzárendelt

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = x'_0 \quad (2.25)$$

kezdeti feltétel a test kezdeti elmozdulását és a kezdeti sebességét írja elő.

□

**2.29. Példa. (harmonikus rezgőmozgás)** Tekintsük most (2.24) speciális esetét. Tegyük fel, hogy a testre ható közegellenállás elhanyagolható, azaz  $\gamma = 0$ , és nincs külső erő, azaz  $f(t) = 0$ :

$$mx'' + kx = 0. \quad (2.26)$$

A karakterisztikus egyenlet

$$m\lambda^2 + k = 0,$$

amelynek megoldásai  $\lambda = \pm i\omega_0$ , ahol  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ . A (2.26) általános megoldása tehát

$$x(t) = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t.$$

Ez tetszőleges  $c_1$  és  $c_2$ -re egy harmonikus rezgőmozgást definiál, hiszen átalakítható az

$$x(t) = R \cos(\omega_0 t - \delta)$$

alakba. Ugyanis

$$R \cos(\omega_0 t - \delta) = R(\cos \omega_0 t \cos \delta + \sin \omega_0 t \sin \delta) = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t$$

teljesül, ha

$$R \cos \delta = c_1 \quad \text{és} \quad R \sin \delta = c_2,$$

azaz

$$R = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \quad \text{és} \quad \operatorname{tg} \delta = \frac{c_2}{c_1}.$$

$\omega_0$ -t a rezgés *saját frekvenciájának*,  $\delta$ -t *fázisszögnek*,  $R$ -t pedig a rezgés *amplitúdójának* hívjuk.  $\square$

**2.30. Példa. (csillapított rezgőmozgás)** Most feltesszük, hogy nincs külső erőhatás, de van közegellenállás, azaz  $\gamma > 0$ :

$$mx'' + \gamma x' + kx = 0 \quad (2.27)$$

A megfelelő karakterisztikus egyenlet

$$m\lambda^2 + \gamma\lambda + k = 0.$$

Három esetet különböztetünk meg:

1.  $\gamma^2 - 4mk > 0$  (nagy surlódás esete). Ekkor

$$\lambda_1 = \frac{-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 4mk}}{2m} < 0 \quad \text{és} \quad \lambda_2 = \frac{-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 4mk}}{2m} < 0$$

két valós karakterisztikus gyök, így a megoldás

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

alakú. Látható, hogy  $x(t) \rightarrow 0$ , ha  $t \rightarrow \infty$ . A rugó ebben az esetben exponenciális sebességgel a nyugalmi állapothoz, azaz a 0 elmozduláshoz tart. A 2.2. Ábrán néhány tipikus megoldásgörbe látható ebben az esetben. (Mindhárom ábrán az  $x(0) = 1, x'(0) = 1$ ;  $x(0) = -1, x'(0) = 0$  és az  $x(0) = 0.5, x'(0) = -0.5$  kezdeti feltételekből indított megoldások görbéi láthatók.)

2.  $\gamma^2 - 4mk = 0$  (kritikus surlódás esete). Ekkor  $\lambda = -\frac{\gamma}{2m}t$  kétszeres valós karakterisztikus gyök, ezért a megoldás

$$x(t) = c_1 e^{-\frac{\gamma}{2m}t} + c_2 t e^{-\frac{\gamma}{2m}t}.$$

Ebben az esetben is a nyugalmi helyzethez tart a test. A 2.3. Ábrán néhány 2. típusú megoldás-görbe látható.

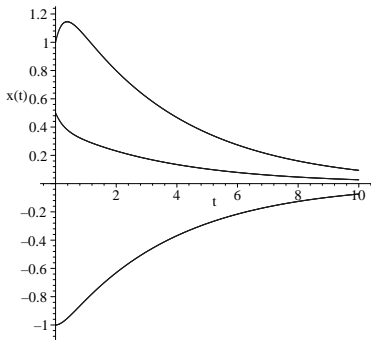
3.  $\gamma^2 - 4mk < 0$  (kis surlódás esete). Ekkor két komplex karakterisztikus gyök van,

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\gamma}{2m} \pm i\mu, \quad \text{ahol} \quad \mu = \frac{\sqrt{4km - \gamma^2}}{2m},$$

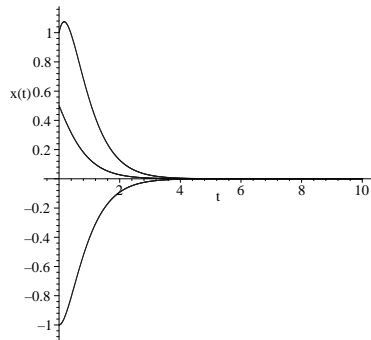
azaz

$$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2m}t} (c_1 \cos \mu t + c_2 \sin \mu t).$$

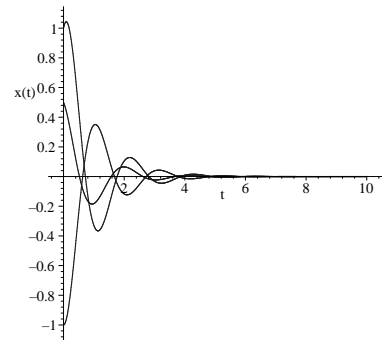
Most is 0-hoz tartanak a megoldások, de oszcillálva, lásd a 2.4. Ábrán.  $\square$



2.2. Ábra.  $x'' + 4x' + x = 0$



2.3. Ábra.  $x'' + 4x' + 4x = 0$



2.4. Ábra.  $x'' + 2x' + 10x = 0$

**2.31. Példa. (amplitúdó moduláció)** Most azt az esetet vizsgáljuk, amikor nincs közegellenállás, de periodikus külső erő hat a testre, konkrétan tekintsük az

$$mx'' + kx = a \cos \omega t \tag{2.28}$$

egyenletet. Legyen  $\omega_0$  a rendszer sajátfrekvenciája, azaz  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ . Nézzük először azt, amikor  $\omega \neq \omega_0$ . Ekkor a határozatlan együtthatók módszerét alkalmazva (2.28) partikuláris megoldását kereshetjük az

$$x_{IP} = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

alakban. Ekkor  $x'_{IP} = -A\omega \sin \omega t + B\omega \cos \omega t$  és  $x''_{IP} = -A\omega^2 \cos \omega t - B\omega^2 \sin \omega t$ . Behelyettesítve a (2.28) egyenletbe

$$(-mA\omega^2 + kA) \cos \omega t + (-mB\omega^2 + kB) \sin \omega t = a \cos \omega t,$$

azaz

$$A = \frac{a}{k - m\omega^2} = \frac{a}{(\omega_0^2 - \omega^2)m} \quad \text{és} \quad B = 0.$$

Az egyenlet általános megoldása ezért

$$x(t) = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t + \frac{a}{(\omega_0^2 - \omega^2)m} \cos \omega t.$$

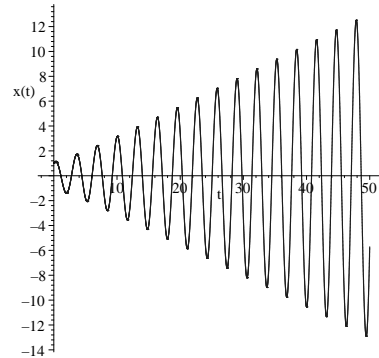
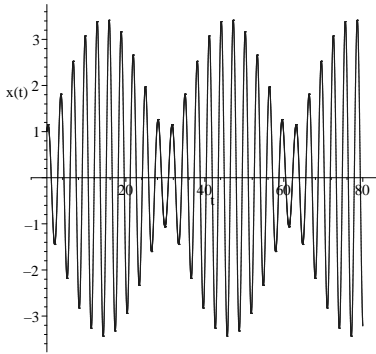
Ha a mozgást a nyugalmi helyzetből, azaz az  $x(0) = 0$  és  $x'(0) = 0$  kezdeti feltételekből indítjuk, végigszámolhatjuk, hogy  $c_1 = -\frac{a}{(\omega_0^2 - \omega^2)m}$  és  $c_2 = 0$  adódik, így a megoldás

$$x(t) = \frac{a}{(\omega_0^2 - \omega^2)m} (\cos \omega t - \cos \omega_0 t).$$

Egyszerű trigonometriai átalakításokkal ez ekvivalens alakban felírható úgy, mint

$$x(t) = \frac{2a}{(\omega_0^2 - \omega^2)m} \sin \frac{(\omega_0 - \omega)t}{2} \sin \frac{(\omega_0 + \omega)t}{2}.$$

Ha  $\omega \approx \omega_0$ , akkor  $\sin \frac{(\omega_0 + \omega)t}{2}$  gyorsan oszcillál a  $\sin \frac{(\omega_0 - \omega)t}{2}$  taghoz képest, így a megoldás grafikonján kettős oszcilláció látható: A burkológörbe, azaz az időben változó amplitúdó egy kis frekvenciájú oszcillációt, a megoldás maga pedig egy nagy frekvenciájú oszcillációt végez (lásd a 2.5. Ábrát). Elektronikában ezt a jelenséget *amplitúdó modulációnak* hívják.  $\square$



2.5. Ábra.  $x'' + 4x = \cos 2.2t$ ,  $x(0) = 1 = x'(0)$       2.6. Ábra.  $x'' + 4x = \cos 2t$ ,  $x(0) = 1 = x'(0)$

**2.32. Példa. (kényszerrezgés)** Az előző példát arra az esetre folytatjuk, amikor a rendszer külső frekvenciája (azaz a testre ható periodikus erő frekvenciája) megegyezik a rendszer belső frekvenciájával, tehát  $\omega = \omega_0$ .

Ebben az esetben az a különbség, hogy az előző példa próbafüggvénye megoldása a homogén egyenletnek. Ezért most a próbafüggvényt az

$$x_{IP} = t(A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t)$$

alakból kaphatjuk meg. Ezt végigszámolva kapjuk, hogy

$$x = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t + \frac{a}{2m\omega_0} t \sin \omega_0 t$$

az általános megoldása a (2.28) egyenletnek. Ekkor oszcilláló, de nem korlátos megoldásokat kapunk, lásd a 2.6. Ábrát. A gyakorlatban persze ezt a rugó esetében nem tapasztaljuk, hiszen a rugó elszakad túl nagy megnyúlás esetén, illetve negatív irányban nem tudjuk tetszőlegesen elmozdítani a testet.  $\square$

**2.33. Példa. (csillapított kényszerrezgés)** Tegyük fel, hogy van közegellenállás és periodikus külső erő hat a testre:

$$mx'' + \gamma x' + kx = a \cos \omega t. \quad (2.29)$$

Keressük a partikuláris megoldást újra az

$$x_{IP} = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

alakban. Az  $x'_{IP} = -A\omega \sin \omega t + B\omega \cos \omega t$  és  $x''_{IP} = -A\omega^2 \cos \omega t - B\omega^2 \sin \omega t$  deriváltakat behelyettesítve a (2.29) egyenletbe

$$(-mA\omega^2 + \gamma B\omega + kA) \cos \omega t + (-mB\omega^2 - \gamma A\omega + kB) \sin \omega t = a \cos \omega t,$$

azaz

$$\begin{aligned} -mA\omega^2 + \gamma B\omega + kA &= a \\ -mB\omega^2 - \gamma A\omega + kB &= 0. \end{aligned}$$

$\omega_0$  definíciójából következik, hogy  $k = m\omega_0^2$ , ezért az egyenletrendszer átírható az

$$\begin{aligned} mA(\omega_0^2 - \omega^2) + \gamma B\omega &= a \\ mB(\omega_0^2 - \omega^2) - \gamma A\omega &= 0 \end{aligned}$$

alakban. Ennek megoldása

$$A = \frac{am(\omega_0^2 - \omega^2)}{m(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} \quad \text{és} \quad B = \frac{a\gamma\omega}{m(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}.$$

A partikuláris megoldás alakja tehát

$$x_{IP} = A \cos \omega t + B \sin \omega t = R \cos(\omega t - \delta),$$

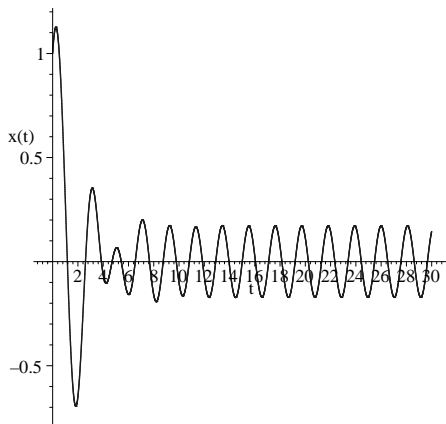
ahol

$$R = \sqrt{A^2 + B^2} = \frac{|a|}{\sqrt{m(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}} \quad \text{és} \quad \text{tg } \delta = \frac{\gamma\omega}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}.$$

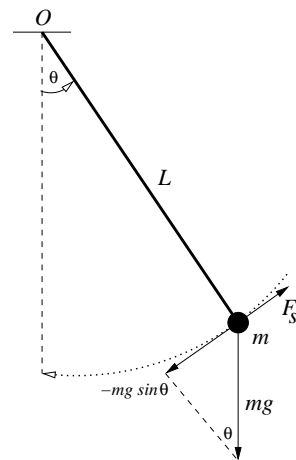
Tegyük fel például, hogy a 2.33. Példában vizsgált 3. eset, azaz kis surlóság esete áll fenn. A 2.33. Példa jelölését használva tehát az egyenlet általános megoldása

$$x(t) = x_H(t) + x_{IP}(t) = e^{-\frac{\gamma}{2m}t}(c_1 \cos \mu t + c_2 \sin \mu t) + R \cos(\omega t - \delta).$$

A megoldás két függvény összegeként áll elő. A 2.33. Példában láttuk, hogy a homogén egyenlet általános megoldása mindhárom esetben 0-hoz tart. A megoldás ezen részét *tranziens megoldásnak* hívjuk. Nagy  $t$  esetén a megoldás képletében  $x_H(t)$  elhanyagolható lesz, és  $x(t) \approx x_{IP}(t)$ , azaz minden kezdeti feltételből nagy  $t$ -re közel periodikus megoldást kapunk, ahogy az a 2.7. Ábrán látható. Azt mondjuk, hogy a megoldás egy *periodikus egyensúlyi helyzethez* tart.  $\square$



2.7. Ábra.  $x'' + x' + 4x = \cos 3t$ ,  $x(0) = 1 = x'(0)$



2.8. Ábra. matematikai inga

**2.34. Példa. (ingamozgás)** Tekintsünk egy matematikai ingát, azaz egy olyan idealizált ingát, ahol egy súlytalannak tekintett  $L$  hosszú rúd végére egy  $m$  tömegű testet erősítünk (lásd a 2.8. Ábrát). Ekkor a test egy körpálya mentén mozog.

Jelölje  $\theta = \theta(t)$  a rúd függőleges iránytól mért elfordulását radiánban mérve. Egy  $\theta$  szögű elmozdulás közben a test  $s = L\theta$  utat tesz meg a körpályán. A test kerületi sebessége  $v = L\theta'$  és a kerületi gyorsulása  $a = L\theta''$ . A kerületi sebesség és a gyorsulás is a mozgás közben az érintő irányába mutat. A Newton II. törvényét is úgy írjuk fel, hogy a testre ható erők eredőjének érintő irányú komponensét vesszük.

A testre mozgás közben három erő hat:  $mg$  súlyerő,  $F_k$  kötélerő és  $F_s$  surlódási erő. A súlyerő függőlegesen lefele hat, ennek érintő irányú komponense  $-mg \sin \theta$ , lásd a 2.8. Ábrát. A kötélerő és a súlyerő rúd irányú komponense kiegyenlíti egymást. Feltesszük, hogy a testre mozgás közben egy sebességgel arányos surlódási erő hat. A sebesség érintő irányú, így a surlódási erő is érintő irányú lesz, a mozgás irányával ellentétes irányba mutatva. A szokásos feltételnek megfelelően feltesszük, hogy a nagysága a kerületi sebességgel arányos, azaz  $F_s = -\gamma L\theta'$ . Feltesszük továbbá, hogy egyéb külső erő nem hat a testre. A mozgásegyenlet tehát

$$mL\theta'' = -\gamma L\theta' - mg \sin \theta$$

alakú. Ezt átrendezve kapjuk

$$\theta'' + \frac{\gamma}{m}\theta' + \frac{g}{L}\sin \theta = 0. \quad (2.30)$$

Ez egy másodrendű nemlineáris egyenlet, hiszen  $\sin \theta$  szerepel az egyenletben. Konkrét megoldáshoz elő kell írni a

$$\theta(0) = \theta_0 \quad \text{és} \quad \theta'(0) = \theta'_0$$

kezdeti feltételeket, amelyek a kezdeti szögelfordulást és szögsebességet adják meg.

Ismert, hogy ha  $\theta \approx 0$ , akkor  $\sin \theta \approx \theta$ . Azaz kis szögelfordulások esetén a (2.30) egyenlet közelíthető a

$$\theta'' + \frac{\gamma}{m}\theta' + \frac{g}{L}\theta = 0 \quad (2.31)$$

egyenlettel. Ez egy másodrendű lineáris differenciálegyenlet pozitív konstans együtthatókkal, így a rugómozgás egyenletével azonos. Ezért az ott tárgyalt típusú megoldásai vannak, azaz  $\gamma > 0$  esetén mindig csillapodó rezgőmozgást végez az inga.

Nagyobb szögelfordulás esetén persze a nemlineáris egyenletet kell megoldanunk, amelyre nincs analitikus megoldási módszerünk.  $\square$