Gyakorló feladatok - 6.

MA1122f

1. Igazolja, hogy az alábbi lineáris terek normált terek a megadott normával:
   (a) V egy n-dimenziós vektortér, amelynek $v_1,\ldots,v_n$ egy bázisa. Legyen $x = \alpha_1 v_1 + \cdots + c_n v_n$ és $\|x\|_p = (\sum_{i=1}^n |c_i|^p)^{1/p}$;
   (b) $BC(X)$ jelölje az X metrikus téren értelmezett valós értékű folytonos és korlátos függvények halmazát, és legyen $f \in BC(X)$-re $\|f\| = \sup\{|f(x)|\colon x \in X\}$;
   (c) Legyen ℓ_∞ a korlátos sorozatok halmaza, $x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell_\infty$, $\|x\| = \sup\{|x_i|\colon i \in \mathbb{N}\}$;
   (d) Legyen c a konvergens sorozatok halmaza, $x = (x_1, x_2, \ldots) \in c$, $\|x\| = \sup\{|x_i|\colon i \in \mathbb{N}\}$;
   (e) ℓ_p azon sorozatok halmaza, amelyre $\sum_{i=1}^\infty |x_i|^p < \infty$, $x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell_p$, és $\|x\|_p = (\sum_{i=1}^\infty |x_i|^p)^{1/p}$;
   (f) X az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvények halmaza, amelyek egy korlátos intervallumon kívül azonosan nullák. Legyen $f \in X$, $\|f\| = \int_{-\infty}^\infty |f(t)|\, dt$;
   (g) $C[a,b]$ az $[a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvényeknek a halmaza, ahol $\|f\| = \max\{|f(t)|\colon t \in [a,b]\}$;
   (h) $C^1[a,b]$ az $[a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos és folytonosan differenciálható függvényeknek a halmaza, ahol $\|f\| = \max\{|f(t)|\colon t \in [a,b]\} + \max\{|f'(t)|\colon t \in [a,b]\}$;

2. Legyen $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|_p = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{1/p}$. Igazolja, hogy $\|\cdot\|_p$ nem norma, ha $0 < p < 1$!

3. Igazolja, hogy minden $x \in \mathbb{R}^n$-re és $1 \le r < p \le \infty$-re $\|x\|_p \le \|x\|_r$!

4. Igazolja, hogy minden $x \in \mathbb{R}^n$-re $\lim\limits_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$!

5. Igazolja, hogy egy tetszőleges $(X, \|\cdot\|)$ normált térben
   (a) $\Big|\|x\| - \|y\|\Big| \le \|x - y\|, \quad x, y \in X,$
   (b) $\|\cdot\|\colon X \to \mathbb{R}$ folytonos függvény!

6. Legyen $(X, \|\cdot\|)$ egy normált tér, $x_n, y_n \in X$, $\alpha_n \in \mathbb{R}$ konvergens sorozatok, $x_n \to x$, $y_n \to y$, $\alpha_n \to \alpha$. Igazolja, hogy
   (a) konvergens sorozat határértéke egyértelmű,
   (b) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = x + y$,
   (c) $\lim_{n\to\infty} \alpha_n x_n = \alpha x$.

7. Legyen $(X_1, \|\cdot\|_1)$ és $(X_2, \|\cdot\|_2)$ normált terek. Igazolja, hogy az $X = X_1 \times X_2$ halmazon $\|x\| = \|x_1\|_1 + \|x_2\|_2$ egy normát definiál, ahol $x = (x_1, x_2) \in X$! Adjon meg más normát is X-en! Ekvivalens-e a megadott norma a $\|\cdot\|$ normával?

8. Legyen P^n a legfeljebb n-edfokú polinomok halmaza, $p(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n$, és legyen $\|p\|_1 = |a_0| + \cdots + |a_n|$ és $\|p\|_\infty = \max\{|p(t)|\colon t \in [0,1]\}$. Igazolja, hogy $\|\cdot\|_1$ és $\|\cdot\|_\infty$ norma P^n-en! Mutassa meg, hogy minden $p \in P^n$-re $\|p\|_\infty \le \|p\|_1$! Mutassa meg, hogy nem létezik olyan $m > 0$ szám, hogy $\|p\|_1 \le m\|p\|_\infty$ teljesüljön minden $p \in P^n$-re!

9. Legyen $f \in C^1[0,1]$, és definiáljuk $\|f\|_1 = |f(a)| + \max\{|f'(t)| : t \in [0,1]\}$. Igazolja, hogy az $\|\cdot\|_1$ norma ekvivalens az 1. feladat (h) pontjában definiált $\|\cdot\|$ normával!

10. Legyen $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Igazolja, hogy

$$\text{(a)} \qquad \|A\|_1 = \max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|, \qquad\qquad \text{(b)} \qquad \|A\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|!$$

11. Definiáljuk az $A\colon C[0,1] \to C[0,1]$ leképezést az $(Ax)(t) = \int_0^1 (t-s)^2 x(s)\,ds$ képlettel. Igazolja, hogy Ax valóban folytonos függvény! Igazolja, hogy A korlátos lineáris operátor és $\|A\| \le 1$! Számítsa ki $\|A\|$-t!

12. Legyen $(x_1, x_2, x_3, \dots) \in \ell_2$. Definiáljuk a következő leképezéseket:

    (a) $T(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots)$,

    (b) $T(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2, x_3, x_4, \dots)$,

    (c) $T(x_1, x_2, x_3, \dots) = (a_1x_1, a_2x_2, a_3x_3, \dots)$, ahol $(a_1, a_2, a_3, \dots)$ egy rögzített korlátos sorozat.

    Igazolja, hogy $T\colon \ell_2 \to \ell_2$ korlátos lineáris leképezés, és számítsa ki $\|T\|$-t! Vizsgálja meg, hogy T injektív ill. ráképezés-e?

13. Igazolja, hogy $T\colon BC(-\infty,\infty) \to BC(-\infty,\infty)$, $(Tf)(t) = f(t+1)$ egy korlátos lineáris operátor, és számítsa ki $\|T\|$-t!

14. Legyen $T_n : \ell_2 \to \ell_2$, $T_n(x_1, x_2, \dots) = (0, \dots, 0, x_n, 0, \dots)$ (azaz a sorozat n-edik tagja x_n). Igazolja, hogy T_n minden n-re egy korlátos lineáris operátor! Számítsa ki $\|T_n\|$-t! Igazolja, hogy $T_n\mathbf{x} \to \mathbf{0}$ minden $\mathbf{x} \in \ell_2$-re, (ahol $\mathbf{0}$ az azonosan nulla sorozat)!

15. Legyen $T_n\colon \ell_2 \to \ell_2$, $T_n(x_1, x_2, \dots) = (x_1, \dots, x_n, 0, \dots)$ (azaz a sorozat $n+1$-edik tagja után minden tag 0). Igazolja, hogy T_n minden n-re egy korlátos lineáris operátor! Számítsa ki $\|T_n\|$-t! Igaz-e, hogy $T_n\mathbf{x} \to \mathbf{x}$ minden $\mathbf{x} \in \ell_2$-re? Igaz-e, hogy $\|T_n - I\| \to 0$, ahol I az identikus leképezés)?

16. Legyen $T_n\colon \ell_\infty \to \ell_\infty$, $T_n(x_1, x_2, \dots) = (x_1, \dots, x_n, 0, \dots)$ (azaz a sorozat $n+1$-edik tagja után minden tag 0). Igazolja, hogy T_n minden n-re egy korlátos lineáris operátor! Számítsa ki $\|T_n\|$-t! Igaz-e, hogy $T_n\mathbf{x} \to \mathbf{x}$ minden $\mathbf{x} \in \ell_2$-re? Igaz-e, hogy $\|T_n - I\| \to 0$, ahol I az identikus leképezés)?

17. Legyen $T\colon \ell_2 \to \ell_2$, $T(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots)$. Létezik-e $\lim_{n\to\infty} T^n\mathbf{x}$ minden $\mathbf{x} \in \ell_2$-re? Létezik-e $\lim_{n\to\infty} T^n$? Léteznek-e ezek a határértékek, ha $T\colon \ell_\infty \to \ell_\infty$?

18. Legyen $T\colon \ell_2 \to \ell_2$, $T(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2, x_3, \dots)$. Létezik-e $\lim_{n\to\infty} T^n\mathbf{x}$ minden $\mathbf{x} \in \ell_2$-re? Létezik-e $\lim_{n\to\infty} T^n$? Léteznek-e ezek a határértékek, ha $T\colon \ell_\infty \to \ell_\infty$?

19. Legyen $F\colon C[0,1] \to \mathbb{R}$, ahol

    (a) $F(x) = \int_0^1 x(s)\,ds$, (b) $F(x) = \frac{x(\epsilon)-x(0)}{\epsilon}$, ahol $\epsilon \in (0,1)$ rögzített,

    (c) $F(x) = x(0)$ (d) $F(x) = \int_0^1 s x(s)\,ds$.

    Igazolja, hogy F korlátos lineáris leképezés! Számítsa ki $\|F\|$-t! Korlátos lesz-e F, ha mint $F\colon L_2[0,1] \to \mathbb{R}$ leképezést tekintjük?

20. Döntse el, hogy az alábbi képletek közül melyik definiál metrikát $\mathbb{R}$-en:

(a) $d(x, y) = (x - y)^2$, (b) $d(x, y) = \sqrt{|x - y|}$,

(c) $d(x, y) = |x^2 - y^2|$, (d) $d(x, y) = |x^3 - y^3|$,

(e) $d(x, y) = \dfrac{|x - y|}{1 + |x - y|}$, (f) $d(x, y) = \max\{1, |x - y|\}$,

(g) $d(x, y) = \log(|x - y| + 1)$, (h) $d(x, y) = \left|\log\left|\dfrac{x}{y}\right|\right|$.

21. Igazolja, hogy az alábbi kifejezések (valós) skaláris szorzatot definiálnak:

(a) $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i y_i$, ahol $\alpha_1, \ldots, \alpha_n > 0$ rögzített számok,

(b) $f, g \in C[0, 1]$, $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)e^{-x}\, ds$,

(c) $x, y \in \ell_2$, $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$,

(d) $f, g \in C^1[0, 1]$, $\langle f, g\rangle = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(x)g'(x)\, ds$.

22. Legyen H egy valós pre-Hilbert tér, ahol $\|\cdot\|$ az $\langle\cdot,\cdot\rangle$ által generált norma. Igazolja, hogy $\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$! Adja meg az analóg azonosságot komlex pre-Hilbert esetén!

23. Igazolja, hogy egy valós pre-Hilber térben x és y ortogonális, akkor és csak akkor, ha $\|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x + y\|^2$!

24. Igazolja, hogy ha nincs olyan skaláris szorzat ℓ_∞-n, amelyre $\langle x, x\rangle = \|x\|^2_{\ell_\infty}$ legyen minden $x \in \ell_\infty$-re!

25. Igazolja, hogy nincs olyan skaláris szorzat $C[0, 1]$-en, hogy $\langle f, f\rangle = \|f\|^2_\infty$ legyen minden $f \in C[0, 1]$-re!

26. Legyen V azon sorozatok halmaza, amelyneknek véges sok tag kivételével minden tagja 0, és legyen $x, y \in V$-re $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$. Igazolja, hogy V pre-Hilbert tér, de nem Hilbert-tér! Adjon meg egy ortonormált bázist V-ben!

27. Legyen $P[0, 1]$ a $[0, 1]$ intervallumon értelmezett (valós) polinomok halmaza, és legyen $p, q \in P[0, 1]$-re $\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)\, ds$. Igazolja, hogy $P[0, 1]$ pre-Hilbert tér, de nem Hilbert-tér!

28. Legyen H egy Hilbert-tér, $V \subset H$ zárt lineáris altere. Igazolja, hogy V is Hilbert-tér!

29. Legyen H egy (valós) Hilbert-tér, $y \in H$ rögzített, és $F\colon H \to \mathbb{R}$, $F(x) = \langle x, y\rangle$. Igazolja, hogy F egy korlátos lineáris leképezés, és számítsa ki $\|F\|$-t!

30. Legyen y_n egy korlátos sorozat és x_n egy 0-hoz tartó sorozat egy H Hilbert-térben. Mutassa meg, hogy ekkor $\langle x_n, y_n\rangle \to 0$ ha $n \to \infty$!

31. Igazolja, hogy egy H Hilbert-térben $\langle x, y\rangle = 0$ minden $x \in H$-ra, akkor és csak akkor, ha $y = 0$!

32. Számítsa ki az $x, y, z \in L_2[-1, 1]$ pontok által meghatározott háromszög szögeinek összegét, ahol $x(t) = 0$, $y(t) = 1$ és $z(t) = t$.

33. Legyen H egy valós Hilbert-tér, $x, y \in H$ rögzített. Igazolja, hogy az $f(t) = \|x - ty\|$ függvény $t = \langle x, y\rangle / \langle y, y\rangle$-re veszi fel minimumát!

34. Ortogonalizálja ℓ_2-ben az

$$x_1 = (1,1,0,0,0,\dots),\ x_2 = (0,1,1,0,0,0,\dots),\ x_3 = (0,0,1,1,0,0,\dots),\ \dots$$

sorozatot! (A sorozat első 4 tagját számítsa ki!)

35. Ortogonalizálja $L_2(-1,1)$-en az $1, x, x^2, \dots$ függvénysorozatot! (A sorozat első 4 tagját számítsa ki!)

36. Számítsa ki az $x = \cos x$ egyenlet közelítő megoldását 6 jegy pontossággal!

37. Igazolja, hogy ha $0 < a < 1/3$ és $0 < b < 1 - a$, akkor az $x = ax^3 + b$ egyenletnek létezik egyértelmű megoldása $[0,1]$-en! Számítsa ki az egyenlet közelítő megoldását $a = 0.1$ és $b = 0.6$-ra 3 jegy pontossággal!

38. Igazolja, hogy az $x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{2x_n}$ sorozat konvergens, ha $p_0 > \sqrt{2}$! Határozza meg a határértékét!

39. Tekintsük az $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ függvényt. Igazolja, hogy $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ minden x, y-re, de az $x_{n+1} = f(x_n)$ fixpontsorozat nem konvergál egyetlen x_0-ra sem!

40. Mutassa meg, hogy az

$$A\colon C[0,1] \to C[0,1], \qquad A(y)(t) = y(0) + \lambda \int_0^t y(s)\,ds$$

lineáris operátor kontrakció az $E = \{y \in C[0,1] \colon y(0) = 2\}$ halmazon, ha $|\lambda| < 1$!

41. Mutassa meg, hogy az

$$y(t) - \left(\int_0^t \frac{y(s)}{2}\,ds \right)^2 = \frac{1}{2}, \qquad t \in [0,1]$$

integrál egyenletnek létezik pontosan egy olyan folytonos megoldása, amelyre $|y(t)| \le 1$ minden $t \in [0,1]$-re!

42. Legyen $0 < \alpha < 1$. Mutassa meg, hogy az

$$y(t) = \int_0^1 e^{-st} \cos(\alpha y(s))\,ds, \qquad t \in [0,1]$$

egyenletnek létezik pontosan egy folytonos függvény megoldása!

43. Lássa be, hogy a következő integrál egyenleteknek létezik egyértelmű megoldása, és határozza meg a megoldást a szukcesszív approximáció módszerével:

(a) $y(t) = t + \frac{1}{2}\int_{-1}^1 (s+t)y(s)\,ds,$ (b) $y(t) = t + \int_0^t (s-t)y(s)\,ds,$

(c) $y(t) = t - \int_0^t (s-t)y(s)\,ds,$ (d) $y(t) = 1 - 2\int_0^t s y(s)\,ds,$