Gyakorló feladatok - 5.

MA1122f – 2004/05 I. félév

1. Oldja meg a következő egyenleteket a komplex számok körében!

   (a) $e^z = 2$ (b) $\operatorname{ch} z = 0$ (c) $e^z = i$ (d) $\sin z = i$

2. Számítsa ki a következő sorozatok határértékét!

   (a) $z_n = \left(\frac{1+i}{\sqrt{\pi}}\right)^n$ (b) $z_n = \frac{in + n^2}{n^2 + i}$ (c) $z_n = \operatorname{tg} in$ (d) $z_n = \left(1 + \frac{i\pi}{n}\right)^n$

3. Konvergensek-e az alábbi sorok?

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n^2}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{n}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n + 1}{n^{3/2}}$ (d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3+i)^{2n}}{(2n)!}$

4. Léteznek-e a következő határértékek? Ha igen, számítsa ki a határértékeket!

   (a) $\lim_{z\to 0} \frac{\operatorname{Re} z}{|z|}$ (b) $\lim_{z\to 0} \frac{\operatorname{Im} z}{|z|+1}$ (c) $\lim_{z\to 0} \frac{(\operatorname{Re} z)^2}{|z|}$ (d) $\lim_{z\to 0} \frac{\operatorname{Re}(z^2)}{|z|}$

5. Legyen $z = x+iy$. Differenciálhatók-e a következő függvények az origó egy környezetében?

   (a) $f(z) = x^2 - y^2 - 2ixy$ (b) $f(z) = x^2 - y^2 + 2ixy$
   (c) $f(z) = x^2 - i(y^2 + x)$ (d) $f(z) = |z|^2$
   (e) $f(z) = x^2 - y^2 + i(2xy + 2)$ (f) $f(z) = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$

6. Számítsa ki a $\int_G f(z)\,dz$ görbe menti integrált, ahol

   (a) $f(z) = \operatorname{Im} z$, G paraméteres előállítása $\gamma(t) = t^2 - it$, $t \in [1,3]$,
   (b) $f(z) = \frac{1}{z}$, G paraméteres előállítása $\gamma(t) = it$, $t \in [1,2]$,
   (c) $f(z) = iz^2$, G paraméteres előállítása $\gamma(t) = \frac{1}{2}\cos t + i\frac{1}{4}\sin t$, $t \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$,
   (d) $f(z) = e^{-z}$, G a 0 és $-2-3i$ pontokat (ebben a sorrendben) összekötő szakasz,
   (e) $f(z) = z^2 + 2z - 5$, G a 0 és $3i$ pontokat összekötő tetszőleges görbe,
   (f) $f(z) = \sin(3i + z)$, G az origó középpontú egységkör i-től -1-ig tartó része (pozitív irányban),
   (g) $f(z) = |z|^2$, G a $2i$ pontot az 5-tel összekötő szakasz,
   (h) $f(z) = z - i$, G paraméterezése $\gamma(t) = e^{3t}\cos 5t + i\ln(t+1)$, $t \in [0,1]$,
   (i) $f(z) = 2z^2 - (2+i)z$, G a $2-3i$, $-5+7$, $1+5i$ és $3i$ pontokat (ebben a sorrendben) összekötő töröttvonal.
   (j) $f(z) = ze^{(1+i)z}$, G az $1-3i$ és $2-i$ pontokat összekötő tetszőleges görbe.

7. Számítsa ki a $\int_G f(z)\,dz$ zárt görbe menti integrálokat, ahol a görbe pozitív irányítású, és

   (a) $f(z) = e^{\sin z}$, G az origó középpontú egységsugarú kör,
   (b) $f(z) = \sin 3z$, G egyenlete: $|z| = 4$,
   (c) $f(z) = \frac{2z}{z-i}$, G: $|z-i| = 2$,
   (d) $f(z) = \frac{1}{(z-2i)^3}$, G: $|z-2i| = 1$,
   (e) $f(z) = z^2 \sin z$, G a $0, 1, 1+i, i$ csúcspontú négyzet,
   (f) $f(z) = \frac{e^{z^2}}{z-i}$, G: $|z-i| = 5$,
   (g) $f(z) = \frac{e^{2z}\sin z^2}{z+i}$, G a $-2+i, -2-2i, 1-2i, 1+i$ pontokat összekötő négyzet,
   (h) $f(z) = \frac{z^4}{z-1}$, G az 1 körüli egységsugarú kör,
   (i) $f(z) = \frac{z^3-5z+i}{z-1+2i}$, G az $1-2i$ körüli tetszőleges egyszerű zárt görbe,
   (j) $f(z) = \frac{\sin 3z}{z^2}$, G az 1 középpontú 3 sugarú kör,
   (k) $f(z) = \frac{(z+i)^2}{(z-2i)^4}$, G a $2i$ középpontú 1 sugarú kör,
   (l) $f(z) = \frac{4e^{z^2}}{(z-i)^3}$, G egy tetszőleges, i-t a belsejében tartalmazó egyszerű zárt görbe.

8. Adja meg a következő függvények z_0 körüli Laurent-sorát!

   (a) $\dfrac{2z}{1+z^2}$, $z_0 = i$, (b) $\dfrac{\sin z}{z^2}$, $z_0 = 0$, (c) $\dfrac{z+i}{z-i}$, $z_0 = i$, (d) e^{1/z^3}, $z_0 = 0$

9. Számítsa ki a következő függvények reziduumát a z_0 pontban!

   (a) $\dfrac{3z^2+1}{z^2+1}$, $z_0 = -i$, (b) $\dfrac{\sin z}{z^2(z^2+4)}$, $z_0 = 2i$,
   (c) $\dfrac{\cos 2z}{(z-i)(z+2)}$, $z_0 = i$, (d) $\dfrac{1}{1+z^2}$, $z_0 = -i$.

10. Számítsa ki a $\int_G f(z)\,dz$ zárt görbe menti integrálokat, ahol a görbe pozitív irányítású, és

   (a) $f(z) = \frac{e^{z^2}}{z^2(z-1)}$, G: $|z-1| = \frac{1}{2}$,
   (b) $f(z) = \frac{\sin z}{z^2+4}$, G az origó középpontú, a tengelyekkel párhuzamos, 5 oldalhosszú négyzet,
   (c) $f(z) = \frac{z^3+1}{(z-1)(z+2i)(z+5)}$, G: $|z+2i| = 3$,
   (d) $f(z) = \frac{e^z}{z^2-1}$, G: $|z| = 2$.