Gyakorló feladatok - 2.

MA1122f

1. Adja meg a következő függvények Laplace-transzformáltját:

(a) $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 3 \\ (t-3)^4, & t \geq 3, \end{cases}$ (b) $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 1 \\ t^2, & 1 \leq t \leq 3, \\ 0, & t \geq 3, \end{cases}$

(c) $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 1 \\ t^3 - t + 2, & t \geq 1, \end{cases}$ (d) $f(t) = H_1(t) + 2H_2(t) - 4H_5(t)$,

(e) $f(t) = \int_0^t (t-u)^2 \cos 2u \, du$, (f) $f(t) = \int_0^t e^{-(t-u)} \sin u \, du$,

(g) $f(t) = \int_0^t (t-u) e^u \, du$, (h) $f(t) = \int_0^t \sin(t-u) \cos u \, du$.

2. Adja meg a következő függvények inverz Laplace-transzformáltját:

(a) $F(s) = \frac{6}{(s-2)^4}$, (b) $F(s) = \frac{e^{-2s}}{s^2+s-2}$,

(c) $F(s) = \frac{2(s-1)e^{-2s}}{s^2-2s+2}$, (d) $F(s) = \frac{2e^{-2s}}{s^2-4}$,

(e) $F(s) = \frac{e^{-s}+e^{-2s}-e^{-3s}-e^{-4s}}{s}$, (f) $F(s) = \frac{1}{s^4(s^2+1)}$,

(g) $F(s) = \frac{s}{(s+1)(s^2+4)}$, (h) $F(s) = \frac{1}{(s+1)^2(s^2+4)}$.

3. Laplace-transzformált módszerrel oldja meg a következő kezdeti érték feladatokat:

(a) $y'' + y = f(t)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < \pi/2 \\ 0, & t \geq \pi/2, \end{cases}$

(b) $y'' + 2y' + 2y = f(t)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $f(t) = \begin{cases} 1, & \pi \leq t < 2\pi \\ 0, & t \geq 2\pi \text{ és } t < \pi, \end{cases}$

(c) $y'' + y' + \frac{5}{4}y = f(t)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $f(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 \leq t < \pi \\ 0, & t \geq \pi \end{cases}$

(d) $y'' + 4y = \sin t - H_{2\pi}(t) \sin(t - 2\pi)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$,

(e) $y^{iv} - y = H_1(t) - H_2(t)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 0$, $y'''(0) = 0$,

(f) $y'' + 2y' + 2y = \delta(t - \pi)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$,

(g) $y'' + 4y = \delta(t - \pi) - \delta(t - 2\pi)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$,

(h) $y'' + 2y' + 2y = \cos t + \delta(t - \pi/2)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$,

(i) $y'' + 2y' + 2y = \sin 3t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$,

(j) $y'' + y' + \frac{5}{4}y = 1 - H_\pi(t)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$.