MA1344B **A.** 2009.03.27.

NÉV: .... NEPTUN kód: .... Gyak.vez.:................................

Gyak. időpontja:................................

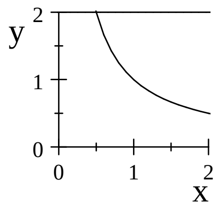
1. Egy vizsgán a tételek 1-től 15-ig vannak számozva. Közülük kettőt választ véletlenszerűen (visszatevés nélkül) egy hallgató. Mennyi az esélye, hogy

   (a) mindkét tétel páros sorszámú? (2p)
   $ö: \binom{15}{2} = 105 \quad k: \binom{7}{2} = 21 \quad p = \frac{21}{105} = \frac{1}{5} = 0.2$

   (b) a tételek közt van páros sorszámú? (3p)
   $ö: \binom{15}{2} = 105 \quad \overline{k}: \binom{8}{2} = 28 \quad p = 1 - \frac{28}{105} = 1 - \frac{4}{15} = \frac{11}{15} = 0.733\,33$

2. Választunk két számot egymástól függetlenül a $[0;2]$ intervallumban a geometriai valószínűség szerint. Mennyi annak valószínűsége, hogy a szorzatuk kisebb 1-nél? (5p)

   $ö: \Omega = \{(x;y) \mid x, y \in [0;2]\} \quad T = 2 \cdot 2 = 4$
   $k: y < \frac{1}{x} \quad t = 2 \cdot 0.5 + \int_{0.5}^{2} \frac{1}{x} dx = 2.386\,3$



   $p = \frac{2.386\,3}{4} = 0.596\,58$

3. Legy A esemény az, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott ember munkanélküli, a B esemény az, hogy van szakmája. Ha $P(A) = 0.08$, $P(B) = 0.75$, és $P(A \cap B) = 0.06$, akkor fejezze ki A-val és B-vel az alábbi eseményeket, és adja meg valószínűségüket:

   (a) nincs szakmája, de nem munkanélküli; (2p)
   $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - (0.08 + 0.75 - 0.06) = 0.23$

   (b) nincs szakmája, és munkanélküli; (2p)
   $P\left(A \cap \overline{B}\right) = P(A \setminus B) = 0.08 - 0.06 = 0.02$

   (c) van szakmája vagy nem munkanélküli; (2p)
   $P\left(\overline{A} \cup B\right) = 1 - P\left(A \cap \overline{B}\right) = 1 - 0.02 = 0.98$

   (d) egyik esemény sem teljesül, vagy mindkettő teljesül; (2p)
   $P\left(\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) \cup (A \cap B)\right) = P(\overline{A} \cap \overline{B}) + P(A \cap B) = 0.23 + 0.06 = 0.29$

4. Egymástól függetlenül kitöltünk két ötös lottót. Mennyi annak esélye, hogy legalább az egyik szelvény öttalálatos? (4p)
   A_1 − az első szelvény öttalálatos $\quad A_2$ − a második szelvény öttalálatos
   $P(A_1 \cup A_2) = \frac{1}{\binom{90}{5}} + \frac{1}{\binom{90}{5}} - \frac{1}{\binom{90}{5}} \cdot \frac{1}{\binom{90}{5}} = \frac{87\,898\,535}{1931\,538\,157\,735\,824} = 4.550\,7 \times 10^{-8}$

5. Kétszer gurítunk egy kockát. Feltéve, hogy a dobások összege 10, mennyi az esélye, hogy van hatos a dobások között? Független-e a két esemény? Indoklást kérünk! (6p)
   ö: $6^2 = 36$
   B − összeg 10 $\quad k: 4+6,\ 6+4,\ 5+5 \quad$ 3db $\quad P(B) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$
   A − van hatos $\quad \overline{k}: 5^2 = 25 \quad P(A) = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36} \quad A \cap B$ − $k: 4+6, 6+4 \quad 2 \quad P(A \cap B) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$
   $P(A \mid B) = \frac{\frac{1}{18}}{\frac{1}{12}} = \frac{2}{3} = 0.666\,67 \neq \frac{11}{36}$ →NEM függetlenek!

6. Egy vizsgán három, A, B és C szak hallgatói vesznek részt. A vizsgázók 40%-a A-szakos, 45%-a B-szakos, 15%-a C szakos. Ismert, hogy az A szak hallgatói 0.2, a B szak hallgatói 0.3, és a C szak hallgatói 0.5 valószínűséggel buknak meg. Találomra választva egy vizsgázót,

   (a) mennyi annak valószínűsége, hogy a választott hallgató nem bukik meg? (3p)
   $P(S) = 0.8 \cdot 0.4 + 0.7 \cdot 0.45 + 0.5 \cdot 0.15 = 0.71$

(b) ha tudjuk, hogy megbukott, mennyi annak valószínűsége, hogy a hallgató B szakos? (3p)
$P(B \mid \overline{S}) = \frac{0.3 \cdot 0.45}{0.29} = \mathbf{0.465\,52}$

7. Kétszer választunk visszatevéssel a magyar kártyából. Legy ξ a kivett ászok száma. Adja meg

(a) ξ eloszlását; (3p)
$P(\xi = 0) = \frac{28 \cdot 28}{32 \cdot 32} = \frac{49}{64} = 0.765\,63 \quad P(\xi = 1) = 2 \cdot \frac{28 \cdot 4}{32 \cdot 32} = \frac{7}{32} = 0.218\,75$
$P(\xi = 2) = \frac{4 \cdot 4}{32 \cdot 32} = \frac{1}{64} = 1.\,562\,5 \times 10^{-2}$

(b) várható értékét! (2p)
$M(\xi) = 0 \cdot \frac{49}{64} + 1 \cdot \frac{7}{32} + 2 \cdot \frac{1}{64} = \frac{1}{4} = 0.25$

(c) Mennyi ξ eloszlásfüggvényének értéke az 1 helyen? (1p)
$F(1) = P(\xi < 1) = P(\xi = 0) = \frac{49}{64} = 0.765\,63$

8. Legyen egy ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{ha } e \le x \le e^2 \\ 0 & \text{különben} \end{cases} .$$

(a) Adja meg ξ eloszlásfüggvényét! (3p)
$$F(x) = P(\xi < x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \le e \\ \ln(x) - 1 & \text{ha } e < x \le e^2 \\ 1 & \text{ha } e^2 < x \end{cases}$$

(b) Számolja ki ξ várható értékét! (2p)
$M(\xi) = \int_e^{e^2} x \cdot \frac{1}{x} dx = e^2 - e = 4.\,670\,8$

(c) Mennyi az esélye, hogy ξ értéke 4 és 5 közé esik? (2p)
$P(4 < \xi < 5) = F(5) - F(4) = \ln(5) - 1 - (\ln(4) - 1) = \ln 5 - \ln 4 = 0.223\,14$

(d) Mely értéknél nagyobb ξ értéke 0.95 valószínűséggel? (3p)
$0.95 = P(\xi > x) = 1 - F(x) \to 0.05 = F(x) \to 0.05 = \ln(x) - 1 \to x = e^{1.05} = 2.\,857\,7$

MA1344B **B.** 2009.03.27.

NÉV: .... NEPTUN kód: .... Gyak.vez.:...............................

Gyak. időpontja:...............................

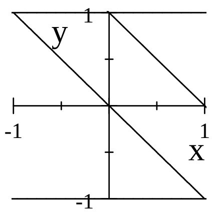
1. Tegyük fel, hogy a hét bármely napjára (hétfő, kedd, szerda, ... , vasárnap) egyforma valószínűséggel esnek a születésnapok. Négy embert találomra választva, mennyi az esélye, hogy

   (a) a hét különböző napjaira esnek a születésnapjaik? (3p)
   ö: $7^4 = 2401$ $\quad k: 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4 = 840$ $\quad p = \frac{840}{2401} = \frac{120}{343} = 0.349\,85$

   (b) kettőnek vasárnapra, kettőnek pedig a hét más napjaira esik a születésnapja? (3p)
   ö: $7^4 = 2401$ $\quad k: \binom{4}{2}\cdot 6^2 = 216$ $\quad p = \frac{216}{2401} = 8.\,996\,3\times 10^{-2}$

2. Választunk két számot a $[-1;1]$ intervallumból egymástól függetlenül a geometriai valószínűség szerint. Mennyi annak valószínűsége, hogy összegük 0 és 1 közé esik? (5p)

   ö : $\Omega = \{(x;y) \mid x,y\in[-1;1]\}$ $\quad T = 2\cdot 2 = 4$
   $k: 0 < x+y < 1$ $\quad t = \frac{2\cdot 2}{2} + \frac{1\cdot 1}{2} = \frac{5}{2}$



   $p = 1 - \frac{\frac{5}{2}}{4} = \frac{3}{8} = 0.375$

3. Véletlen sorrendbe rendezzük az 1,2,3,4,5 számokat úgy, hogy minden sorrend egyformán valószínű. Mennyi az esélye, hogy

   (a) az 5-ös a helyére, vagyis az ötödik helyre kerül? (2p)
   $P(A_5) = \frac{4!}{5!} = \frac{1}{5} = 0.2$

   (b) az 1-es és az 5-ös valamelyike a helyére kerül? (3p)
   $P(A_1\cap A_2) = \frac{3!}{5!} = \frac{1}{20} = 0.05$ $\quad P(A_1\cup A_2) = \frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{20} = \frac{7}{20} = 0.35$

   (c) legalább az egyik szám az öt közül a helyére kerül? (3p)
   $P(A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4\cup A_5) = 5\cdot\frac{1}{5} - \binom{5}{2}\cdot\frac{1}{20} + \binom{5}{3}\cdot\frac{2!}{5!} - \binom{5}{4}\cdot\frac{1}{5!} + 1\cdot\frac{1}{5!} =$
   $= 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} = \frac{19}{30} = 0.633\,33$

4. Kétszer gurítunk kockával. Feltéve, hogy az eredmények egymástól való eltérése 2, mennyi az esélye, hogy az eredmények összege 8? Független-e a két esemény? Indoklást kérünk! (6p)
   ö: $6^2 = 36$
   $B -$ eltérés $= 2$ $\quad k: 1-3,\ 2-4,\ \mathbf{3-5},\ 4-6 \quad \times 2 = 8$ $\quad P(B) = \frac{8}{36} = \frac{2}{9} = 0.222\,22$
   $A -$ összeg $= 8$ $\quad k: 2+6,\ 3+5,\ \times 2 = 4 \quad 4+4\ \times 1 \to 5$ $\quad P(A) = \frac{5}{36}$
   $A\cap B -$ $\quad k: 2$ $\quad P(A\cap B) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18} = 5.\,555\,6\times 10^{-2}$
   $P(A\mid B) = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{2}{9}} = \frac{1}{4} = 0.25 \neq P(A) \to$NEM függetlenek

5. Egy dobozban 10 piros és 5 fehér golyó van. Egymás után húzunk ki három golyót (visszatevés nélkül), mennyi annak valószínűsége, hogy az első két húzás piros, a harmadik fehér golyó? (4p)
   $P(P_1\cap P_2\cap F_3) = P(P_1)\cdot P(P_2\mid P_1)\cdot P(F_3\mid P_1\cap P_2) = \frac{10}{15}\cdot\frac{9}{14}\cdot\frac{5}{13} = \frac{15}{91} = 0.164\,84$

6. Egy vizsgán három, A, B és C szak hallgatói vesznek részt. A vizsgázók 40%-a A-szakos, 45%-a B-szakos, 15%-a C szakos. Ismert, hogy az A szak hallgatói 0.8, a B szak hallgatói 0.7, és a C szak hallgatói 0.5 valószínűséggel nem buknak meg. Találomra választva egy vizsgázót,

   (a) mennyi annak valószínűsége, hogy a választott hallgató megbukik a vizsgán? (3p)
   $P(\overline{S}) = 0.2\cdot 0.4 + 0.3\cdot 0.45 + 0.5\cdot 0.15 = 0.29$

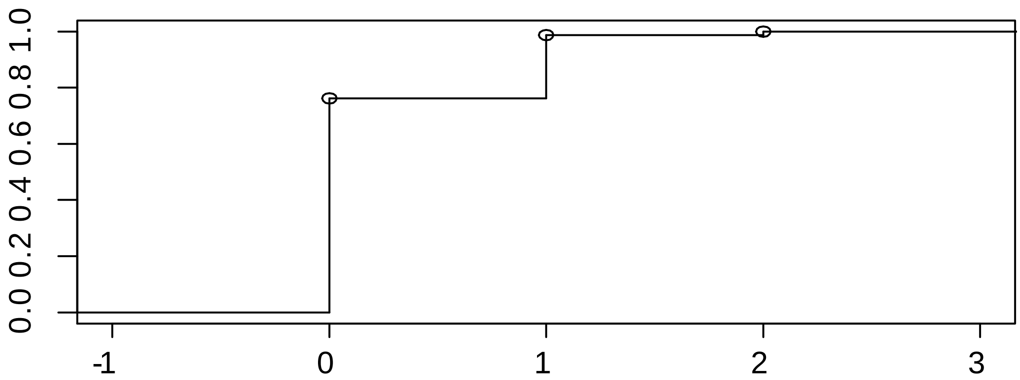
   (b) ha tudjuk, hogy nem bukott meg, melyik szak hallgatója a legnagyobb valószínűséggel? (4p)
   $P(A\mid S) = \frac{0.8\cdot 0.4}{0.71} = \mathbf{0.450\,7}$ $\quad P(B\mid S) = \frac{0.7\cdot 0.45}{0.71} = 0.443\,66$ $\quad P(C\mid S) = 1 - 0.4507 - 0.44366 = 0.105\,64$

7. Visszatevés nélkül választunk két lapot a magyar kártyából. Legy ξ a kivett ászok száma. Adja meg

   (a) ξ eloszlását; (3p)
   $P(\xi = 0) = \frac{\binom{28}{2}}{\binom{32}{2}} = \frac{189}{248} = 0.762\,10 \quad P(\xi = 1) = \frac{\binom{28}{1}\cdot\binom{4}{1}}{\binom{32}{2}} = \frac{7}{31} = 0.225\,81 \quad P(\xi = 2) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{32}{2}} = \frac{3}{248} = 1.\,209\,7 \times 10^{-2}$

   (b) várható értékét! (2p)
   $M(\xi) = 0 \cdot \frac{189}{248} + 1 \cdot \frac{7}{31} + 2 \cdot \frac{3}{248} = \frac{1}{4} = 0.25$

   (c) Ábrázolja ξ eloszlásfüggvényét! (2p)



8. Egység sugarú kör belsejében választunk egy véletlen pontot a geometriai valószínűség szerint. Legyen ξ a választott pontnak a középponttól való távolsága. Adja meg

   (a) ξ eloszlásfüggvényét, (3p)
   $$F(x) = P(\xi < x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \le 0 \\ x^2 & \text{ha } 0 < x \le 1 \\ 1 & \text{ha } 1 < x \end{cases}$$

   (b) sűrűségfüggvényét, (2p)
   $$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{ha } 0 < x \le 1 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

   (c) várható értékét! (2p)
   $M(\xi) = \int_0^1 x \cdot 2x dx = \frac{2}{3} = 0.666\,67$