POLYGON
XVI.köt., 2.sz., 2008. ápr.

MŰHELYSAROK

Egyenesektől való távolságokról

(Megjegyzés egy KöMaL feladathoz)

Szalkai István

A KöMaL 2005. januári számában jelent meg az alábbi probléma:

B.3788. *Adott az ABC háromszög. Mi azon P pontok mértani helye a háromszög belsejében, amelyeknek az AB oldal egyenesétől mért távolsága számtani közepe a BC és a CA oldalak egyenesétől mért távolságának?*

Hasonló kérdést tesz fel a *Gordiusz* tesztverseny 2005. évi megyei fordulójának 9. osztályosoknak szóló **28.** feladata:

Adott két metsző egyenes és egy $d > 0$ távolság. Mi azon pontok halmaza az egyenesek síkjában, amelyeknek a két adott egyenestől mért távolságösszege d?

Vizsgáljuk meg a problémát kissé általánosabban is:

1. Általánosított probléma: *Legyenek adottak a síkon az $e_1,\ldots,e_n$ tetszőleges egyenesek, továbbá az $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$, c tetszőleges (akár pozitív akár negatív) valós számok. Keresendő azon P pontok mértani helye, amelyekre*

$$\alpha_1 \cdot d_1 + \cdots + \alpha_n \cdot d_n = c \tag{1}$$

ahol d_i jelöli a P pontnak az e_i egyenestől való távolságát.

A fenti általános megfogalmazás nem csak a szögfelező egyenes, párhuzamos egyenesek középvonala, háromszög érintő körei középpontjai feladatát tartalmazza, hanem rengeteg egyéb problémát is (pl.a *Geometriai Feladatgyűjtemény* I. kötet 162, 163, 208, 209, 211, 228, 280, 281, 283, 310, 346-348, 376, 640, 750, 858, 859, 869, ... feladatai).

Az $\alpha_i = 0$ eset is megengedett; ekkor az e_i egyenessel nem kell foglalkoznunk. Természetesen az (1)-hez hasonló egyenletekből álló *egyenletrendszer* megoldása a megfelelő mértani helyek metszéspontja(i). Mint „megszállott" koordinátageometria-rajongó, gondolkodás nélkül(!) azonnal a Hesse képlet jut eszembe:

Hesse: *A $P(x_0, y_0)$ pont előjeles távolsága az $e: Ax + By = C$ egyenestől*

$$d_{Pe} = \frac{Ax_0 + By_0 - C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

ahol d előjele aszerint pozitív vagy negatív, hogy P az egyenes által meghatározott félsíkok közül abban van-e, amerre az (A, B) normálvektor mutat vagy sem.

A képletet általában csak röviden

$$d = \left| \frac{Ax_0 + By_0 - C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|$$

alakban idézik, azonban nekünk most szükségünk van az abszolútértékek felbontására. Az (1) feltétel tehát így írható:

$$\sum_{i=1}^{n} (\pm\alpha_i) \cdot \frac{A_i x + B_i y - C_i}{\sqrt{A_i^2 + B_i^2}} = c,$$

azaz

$$x \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{(\pm\alpha_i) \cdot A_i}{\sqrt{A_i^2 + B_i^2}} + y \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{(\pm\alpha_i) \cdot B_i}{\sqrt{A_i^2 + B_i^2}} = c + \sum_{i=1}^{n} \frac{(\pm\alpha_i) \cdot C_i}{\sqrt{A_i^2 + B_i^2}}, \tag{2}$$

attól függően, hogy P éppen az egyenesek által meghatározott síkrészek közül melyik (véges vagy végtelen) síkrészben van (ezt mutatja α_i előjele).

A végeremény pedig azonnal látszik:

2. Tétel: *Az (1) probléma megoldása: Az egyenesek által alkotott minden síkrészben egy-egy egyenesdarab (szakasz vagy fél- vagy egész- egyenes), amely egyenesdarabok a síktartomány egyik határától másik határáig terjednek – sem több, sem kevesebb. Az egyenesdarabok zártak, azaz a síktartomány határával való metszetük is a mértani hely része.*

Elfajuló esetben a mértani hely (egy-egy síkrészben) lehet üres halmaz vagy az egész síkrész is.

Az elfajuló esetekre később mutatunk példát. Az Olvasó gondolkozzon el azon, hogy miért nincs pl. olyan eset, amikor a mértani hely nem az egész síkrész, hanem annak csak egy kétdimenziós valódi részhalmaza.

A fenti eredmény alapján az (1) alakú problémákat már könnyen megoldhatjuk: mindössze *csak a síkdarabok határain, vagyis az egyenesek szakaszain kell a mértani hely pontjait megkeresnünk, és a fenti állítás szerint az őket összekötő szakaszok alkotják a (teljes) mértani helyet.*

Az elfajuló eseteket is már az egyenes-szakaszokon felismerhetjük: legalább kettő határoló szakaszon több pontja is van a mértani helynek, vagy egyiken sincs egyetlen pont sem. De ez nem szép megoldás, és nem adja meg az egyenesdarabok jellemzésését sem. Az általános problémától nem is várom el, hogy csak elemi geometriai eszközökkel teljes és egyszerű diszkussziót találjunk. Pár egyszerű, általában is hasznos észrevételt azonban igen.

3. Állítás: *Ha P_1 és P_2 mindketten kielégítik az (1) feltételt (azaz elemei a mértani helynek), ugyanabban a síkrészben vannak, akkor a P_1P_2 egyenesnek a megadott síkrészbe eső teljes darabja (a P_1P_2 szakaszon túli része is, egészen a síkrész határáig) a mértani helynek része.*

Bizonyítás: Egyszerűen csak a párhuzamos szelők tételét kell alkalmaznunk. Jelölje $d_i^{(1)}$ és $d_i^{(2)}$ a P_1 illetve a P_2 pontoknak az e_i egyenesektől való távolságait. Ha a P pont $u : v$ arányban osztja a P_1P_2 szakaszt (ha nem belül van, akkor u és v közül valamelyik negatív), akkor P-nek az e_i egyenestől való távolsága

$$d_i = \frac{v \cdot d_i^{(1)} + u \cdot d_i^{(2)}}{u+v},$$

a feltételek szerint

$$\alpha_1 \cdot d_1^{(1)} + \cdots + \alpha_n \cdot d_n^{(1)} = c,$$
$$\alpha_1 \cdot d_1^{(2)} + \cdots + \alpha_n \cdot d_n^{(2)} = c$$

és a fenti egyenletek $\frac{v}{u+v}$ illetve $\frac{u}{u+v}$-szereseit összeadva éppen az (1) feltételt kapjuk. ∎

Vigyázzunk: a fenti állításból nem következik, hogy a mértani hely minden síkrészben legfeljebb csak egy egyenes(darab)! Tekintsük például a következő példát:

4. Példa: (Geom.Fgy.I.347.) *Mi a mértani helye azon pontoknak, melyeknek egy szabályos háromszög oldalaitól való távolságai összege a háromszög magassága?*

Legyenek a háromszög csúcsai $A(0, \sqrt{3})$, $B(-1, 0)$, $C(1, 0)$. Ekkor az oldalegyenesek $a : y = 0$, $b : y = \sqrt{3} - \sqrt{3}x$, $c : y = \sqrt{3} + \sqrt{3}x$. A háromszög *belsejében* (2) a következőképpen fest:

$$y - \frac{\sqrt{3} \cdot x + y - \sqrt{3}}{2} - \frac{-\sqrt{3} \cdot x + y - \sqrt{3}}{2} = \sqrt{3},$$

rendezés után:

$$0 = 0.$$

Ez pedig ugye azt jelenti, hogy a háromszög belsejének minden pontja a mértani helyhez tartozik.

Egy másik síkrészben (no melyikben?) pedig:

$$-y + \frac{\sqrt{3} \cdot x + y - \sqrt{3}}{2} + \frac{-\sqrt{3} \cdot x + y - \sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

azaz

$$-\sqrt{3} = \sqrt{3}$$

vagyis üres halmaz. ■

Geometriailag az a legérdekesebb, hogy az egyes esetekben milyen alakzatok jönnek ki.

5. Az $n = 2$ eset: a teljes diszkusszió kellemes hétvégi (KöMaL) feladat, ízelítőül pár gondolat. $c \geq 0$ nyilván feltehető.

Legyen az egyenesek metszéspontja M (a párhuzamos esettel most nem foglalkozunk). A mértani hely mindenképpen M -re (középpontosan) szimmetrikus alakzat.

Ha $\alpha_1, \alpha_2 > 0$, akkor $c = 0$ esetén nyilván csak az M pont a mértani hely.

Tehát $c > 0$. Ekkor $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ miatt M középpontú paralelogrammát kapunk, melynek csúcsai M -től c/α_2 illetve c/α_1 távolságra vannak.

Ha $\alpha_1 > \alpha_2$ és $c = 0$ akkor M-re illeszkedő két, egymásra merőleges egyenes (azaz négy félegyenes) a mértani hely.

Ha $\alpha_1 > \alpha_2$ és $c > 0$ akkor e_1 egyenesen nincs pontja a mértani helynek, míg e_2 egyenesen két pontot könnyen megtalálunk: M -től c/α_1 távolságra vannak amiket jelöljünk Q_1, Q_2 -vel. E két pontból kiinduló félegyeneseket kapunk mértani helyként, melyek e_1 -gyel nem párhuzamosak és nem is metszik e_1-et.

Szalkai István, Pannon Egyetem, Veszprém
szalkai@almos.uni-pannon.hu