Számosságok

dr. Szalkai István
Pannon Egyetem, Veszprém, Matematika Tanszék

2012. augusztus 12.

\Szamossag**Szamoss2www.tex**, 2012.08.12., 02:50'

1. Bevezetés

Ebben a rövid jegyzetben elsősorban a végtelen halmazok méretét, elemeinek *számát* próbáljuk meg "megszámolni", de számos tétel igaz véges halmazokra is. Megmutatjuk, hogy végtelen halmazok mérete is lehet "kisebb" és "nagyobb" is, vagyis végtelen halmazok mérete általában nagyon is különböző!

Vizsgán elsősorban konkrét halmazok számosságait kérdezzük (lásd a fejezetek végén levő felsorolásokat), természetesen a halmazok méreteit (számosságait) a tételek segítségével állapíthatjuk meg / jegyezhetjük meg könnyebben.

2. Definíciók

A bevezető definíciók és tételek tetszőleges, tehát véges és végtelen halmazokra is érvényesek.

1. Definíció. ***(i)*** *Tetszőleges A és B halmazok* ***számossága egyenlő****, ha van köztük egy $f : A \longrightarrow B$ bijektív függvény (vagyis f injekív és szürjektív, vagyis kölcsönösen egy-egyértelmű ráképezés). Ennek jelölése:*

$$|A| = |B| \tag{1}$$

vagy

$$A \sim B \ . \tag{2}$$

(ii) *Az A halmaz számossága* ***kisebb vagy egyenlő****, mint B számossága, jelben $|A| \leq |B|$ ha van $f : A \longrightarrow B$ injekció (kölcsönösen egy-egyértelmű függvény).*
(iii) *Az A halmaz számossága* ***kisebb*** *mint B számossága, jelben $|A| < |B|$ ha $|A| \leq |B|$ és $|A| \neq |B|$.* $\square$

2. Megjegyzés. *A **számosság**ot magát nem definiáltuk, csak az összehasonlítás módjait, mint pl. hosszúságokat is tudunk összehasonlítani méterrúd nélkül.* $\square$

3. Tétel. *Az $|A| = |B|$ reláció alaptulajdonságai: **bármely** A halmazokra*
$|A| = |A|$ *(reflexív),*
$|A| = |B|$ *pontosan akkor, ha* $|B| = |A|$ *(szimmetrikus),*
ha $|A| = |B|$ *és* $|B| = |C|$ *akkor* $|A| = |C|$ *(tranzitív),*
azaz $=$ ekvivalencia *("azonos értékű") reláció.* $\square$

4. Tétel. *Az $\leq$ és $<$ relációk alaptulajdonságai: **bármely** A, B halmazokra*
$|A| \leq |A|$ *de* $|A| \not< |A|$ *(reflexív ill. irreflexív),*
ha $|A| \leq |B|$ *és* $|B| \leq |A|$ *akkor* $|A| = |B|$ *(antiszimmetrikus)*[1]*,*
ha $|A| < |B|$ *akkor* $|B| \not< |A|$ *(aszimmetrikus),*
ha $|A| \leq |B|$ *és* $|B| \leq |C|$ *akkor* $|A| \leq |C|$ *(tranzitív),*
ha $|A| < |B|$ *és* $|B| < |C|$ *akkor* $|A| < |C|$ *(tranzitív),*
azaz $\leq$ rendezési *reláció,* $<$ szigorú rendezési *reláció.* $\square$

5. Példa. *Például a **véges számosságok** Neumann János szerint:*
$\underline{0} := \varnothing$,
$\underline{1} := \{\varnothing\}$,
$\underline{2} := \{\underline{0}, \underline{1}\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$,
$\underline{3} := \{\underline{0}, \underline{1}, \underline{2}\} = \{\varnothing,\ \{\varnothing\},\ \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$,
$\underline{4} := \{\underline{0}, \underline{1}, \underline{2}, \underline{3}\} = \{\varnothing,\ \{\varnothing\},\ \{\varnothing, \{\varnothing\}\},\ \{\varnothing,\ \{\varnothing\},\ \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}\}$,
$\ldots$
$\underline{n} := \{\underline{0}, \underline{1}, \underline{2}, ..., \underline{n-1}\} = \{...\}$, $(n \in \mathbb{N})$
(ún."Neumann-hagymák", ld. pl. 16 *-t a honlapomon "16.Neumann-hagyma" címszónál:* HTTP://MATH.UNI-PANNON.HU/~SZALKAI/16-NEUMANN.DOC *).* $\square$

6. Definíció. *(i) Egy tetszőleges A halmaz **véges**, ha számossága megegyezik* valamely $\underline{n}$ *halmaz ($n \in \mathbb{N}$) számosságával.*
*(ii) Egy tetszőleges A halmaz **végtelen**, ha számossága egyetlen $\underline{n}$ halmaz ($n \in \mathbb{N}$) számosságával sem egyezik meg.* $\square$

7. Tétel. *(Cantor,G.)* Tetszőleges *A halmaz hatványhalmazának számossága nagyobb A számosságánál, azaz*

$$|P(A)| > |A| \ . \tag{3}$$

8. Megjegyzés. *(i) A fenti tétel véges és végtelen halmazokra egyaránt igaz, sőt még az üres halmazra is ! A tétel állítása szerint tehát* bármely *számosságnál létezik nagyobb számosság, vagyis nincs legnagyobb (véges vagy végtelen) számosság.*
(ii) Véges *halmazokra jólismert a*

$$|P(A)| = 2^{|A|} \tag{4}$$

összefüggés ($A = \emptyset$ is lehet). $\square$

[1] ez a Cantor-Bendixson tétel.

A következő jelöléseket és összefüggéseket az algoritmusok elméletében is gyakran használják:

9. Jelölés. ***Tetszőleges*** *A, B halmazok esetén jelölje*

$$B^A := \{f : A \to B \mid f \quad \text{függvény}\} \tag{5}$$

az ***összes*** *$A \to B$ függvény halmazát.* $\square$

10. Megjegyzés. *(i)* ***Vigyázzunk:*** *a nyilak* ***"felülről lefelé"*** *mennek, valamint a függvények értelmezési tartománya az* ***egész*** *A halmaz, azaz $Dom(f) = A$.*
(ii) Véges *halmazokra jólismert a*

$$\left|B^A\right| = |B|^{|A|} \tag{6}$$

összefüggés. $\square$

11. Lemma. *Tetszőleges A halmazra*

$$\left|\underline{2}^A\right| = |P(A)| \tag{7}$$

vagy kissé "érthetőbben" :

$$\left|\{0,1\}^A\right| = |P(A)| \ . \quad \square \tag{8}$$

12. Definíció. *Tetszőleges A halmaz esetén legyen*

$$A^0 := \{\emptyset\} \ , \tag{9}$$

tetszőleges $n \geq 0$ természetes számra

$$A^{n+1} := A^n \times A \ , \tag{10}$$

és végül legyen

$$A^* := \bigcup_{n=0}^{\infty} A^n \ . \quad \square \tag{11}$$

13. Megjegyzés. *Tetszőleges (akár üres) A halmazra*

$$A^1 := A \quad \text{és} \quad A^n := A \times A \times ... \times A \tag{12}$$

(n -tényezős szorzat).
Természetesen $A = \emptyset$ esetén $A^n = \emptyset$ minden $n \geq 1$ kitevőre. $\square$

3. Véges halmazok

Vigyázat! vannak véges halmazok is!

14. Példa. *o) véges intervallumok (valós számhalmazok), pl.* $[6,5] = (4,1) = (3,3) = \emptyset$ *nulla eleműek,*
i) $[7,7]$, $\{2,2\}$ *= egyelemű halmazok,*
ii) $\{3,4\}$ *= kettő elemű halmaz és nem intervallum,*
iii) a) tetszőleges $n, k \in \mathbb{N}$ *nemnulla természetes számokra: egy (akármilyen) n betűs ABC (=tetszőleges n elemű halmaz) elemeiből képzett* legfeljebb k hosszú *szavak (sorozatok) halmaza,*
iv) $D_N := \{N$ *osztóinak halmaza*$\}$ *ahol* $N \in \mathbb{N}$ *rögzített természetes szám,*
v) emberek / autók halmaza Földön,
vi) $(1, 10^6) \cap \mathbb{N}$,
vii) Univerzumban található atomok halmaza,
...
□

4. Megszámlálhatóan végtelen halmazok

15. Definíció. *(i) Az A halmaz* ***megszámlálható*** *(más szóval* ***felsorolható****), ha* $|A| \le |\mathbb{N}|$.
(ii) $|A| = |\mathbb{N}|$ *esetén A -t* ***megszámlálhatóan végtelen****nek, vagy* ***felsorolhatóan végtelen****nek hívjuk, míg* $|A| < |\mathbb{N}|$ *esetén A* ***véges****.*
Ha a fenti két esetet nem akarjuk vagy nem kell megkülönböztetni, akkor egyszerűen csak ***megszámlálható****-t mondunk.*
(iii) $\mathbb{N}$ *számosságát* $\aleph_0$ *-al jelöljük:* $\aleph$ *a héber abc első betűje: "****alef****" .* □

16. Megjegyzés. *A fenti A halmaz elemei párbaállíthatók a természetes számok halmazával, vagyis A felírható*

$$A = \{a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ...\} \tag{13}$$

alakban. □

17. Tétel. *Tetszőleges A halmaz* **pontosan akkor** *megszámlálható (felsorolható), ha felírható (13) alakban.* □

18. Megjegyzés. *Más szavakkal: tetszőleges A halmaz* ***pontosan akkor*** *megszámlálható, ha elemei sorozatba rendezhetők, esetleges ismétlésekkel.* □

19. Tétel. *A természetes számok egyike sem állítható párba a természetes számok halmazával, vagyis a természetes számok halmaza végtelen.* □

20. Tétel. *Megszámlálható (véges vagy végtelen) halmaz bármely részhalmaza is megszámlálható (véges vagy végtelen).* $\square$

21. Tétel. ***Bármely** H **végtelen halmaznak van megszámlálhatóan végtelen részhalmaza.***

Bizonyítás. Legyen $a_0 \in H$ tetszőleges, $a_1 \in H \setminus \{a_0\}$ tetszőleges, ... , $a_{n+1} \in H \setminus \{a_0, ..., a_n\}$ tetszőleges, ... Ekkor $A := \{a_n : n \in \mathbb{N}\} \subset H$ a kívánt részhalmaz. $\blacksquare$

22. Lemma. *Ha A és B megszámlálhatóak, akkor $A \cup B$ is megszámlálható.*

Bizonyítás. Ha $A = \{a_0, a_1, ..., a_n, ...\}$ és $B = \{b_0, b_1, ..., b_n, ...\}$, akkor

$$A \cup B = \{a_0, b_0, a_1, b_1, ..., a_n, b_n, ...\} \tag{14}$$

egy kívánt felsorolás. $\blacksquare$

23. Következmény. *(i) $|H \cup A| = |H|$ bármely H végtelen és A megszámlálható halmazokra.*
(ii) Ha $H \setminus A$ nem véges, akkor $|H \setminus A| = |H|$ tetszőleges H bármilyen végtelen és A megszámlálható halmazokra. $\square$

24. Megjegyzés. *A fenti eredmények szerint a megszámlálhatóan végtelen számosság, vagyis $\aleph_0$ a **legkisebb végtelen** számosság.*

25. Tétel. ***(i) Megszámlálható sok megszámlálható halmaz uniója megszámlálható:***

$$\left| \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i \right| \leq \aleph_0 \quad ha \quad |A_i| \leq \aleph_0 \ . \tag{15}$$

(ii) Megszámlálhatóan sok megszámlálható halmaz uniója akkor és csak akkor megszámlálhatóan végtelen, ha valamelyik megszámlálhatóan végtelen vagy végtelen sok nem üres halmaz van közöttük.
(iii) Megszámlálható halmazok Descartes -szorzata *is megszámlálható:*

$$|A \times B| \leq \aleph_0 \quad ha \quad |A|, |B| \leq \aleph_0 \ . \tag{16}$$

Bizonyítás.

$$\begin{array}{ccccccc}
(a_0,b_0) & \rightarrow & (a_0,b_1) & & (a_0,b_2) & \rightarrow & (a_0,b_3) \quad \dots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & \\
(a_1,b_0) & & (a_1,b_1) & & (a_1,b_2) & & \dots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & & \\
(a_2,b_0) & & (a_2,b_1) & & \dots & & \\
 & \swarrow & & & & & \\
(a_3,b_0) & & \dots & & & & \\
\downarrow & & & & & & \\
\vdots & & & & & &
\end{array}$$

$A \times B$ is megszámlálható

$\blacksquare$

26. Definíció. *Tetszőleges $A \neq \emptyset$ halmazra legyenek*
(i) A hatványai *:* $A^0 := \{\emptyset\}$, $A^1 := A$, $A^n := A \times A \times ... \times A$ *(n -tényezős Descartes szorzat),* $n \in \mathbb{N}$,
(ii) $A^* := \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ *= A elemeiből képezhető összes, véges sorozat (string) halmaza.* $\square$

27. Lemma. *Ha A véges vagy megszámlálható, akkor A^* mindenképpen megszámlálhatóan végtelen.*

Bizonyítás. A fenti tételek alapján. $\blacksquare$

28. Megjegyzés. *Azonban A elemeiből képzett* végtelen *hosszú sorozatok halmaza, vagyis $A^{\aleph_0}$ már nem megszámlálható: Cantor tétele szerint már*

$$\underline{2}^{\aleph_0} = |\mathbb{R}| > \aleph_0 \ . \quad \square \tag{17}$$

Érdekességképpen megemlítjük az analízis egy fontos tételét:

29. Tétel. *Ha $f, g : I \to \mathbb{R}$ tetszőleges függvények legfeljebb csak $\aleph_0$ helyen térnek el egymástól, akkor $\int_I f = \int_I g$.* $\square$

A fenti tételek felhasználásával könnyen igazolható, hogy az alábbi halmazok mind megszámlálhatóak:

30. Példa. ***Megszámlálható halmazok:***
($n \in \mathbb{N}$ mindig egy tetszőleges nemnulla természetes számot jelöl):
o) negatív / páros / páratlan / n -el osztható / prím- / ... egész számok halmaza,
i) $\mathbb{N}$ bármely végtelen részhalmaza,
ii) bármilyen megszámlálható (végtelen) halmaznak bármely végtelen részhalmaza,
(megj: $\sim$ i)),
iii) H^* , ahol H egy tetszőleges n - elemű (véges) halmaz,
iv) a véges (akármilyen hosszú) *bitsorozatok (0, 1 -sorozatok) halmaza, azaz* $\{0, 1\}^*$,
v) egy rögzített *(akármilyen) n betűs ABC (=tetszőleges n elemű halmaz) elemeiből képzett* véges (akármilyen hosszú) *szavak (sorozatok) halmaza, (megj:* $\sim \{1, ..., n\}^*$*),*
vi) a magyar betű- és írásjelkészlettel leírható szövegek (pl. könyvek) halmaza,
vii) a kínai betű- és írásjelkészlettel leírható matematikai bizonyítások halmaza,
viii) bármilyen *n betűs ABC (=tetszőleges n elemű halmaz) elemeiből képzett véges szavak (sorozatok) halmaza,*
(megj: $\sim \bigcup_{n=0}^{\infty} \{1, ..., n\}^*$ *vagy* $\sim \mathbb{N}^*$*),*
ix) $\mathbb{Z}_n[x] :=$ *olyan polinomok, melyek együtthatói csak az* $\{0, 1, 2, ..., n-1\}$ *halmazból vannak, (megj:* $\sim H^*$*),*
x) $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

xi) $\mathbb{Q}$ *(megj:* $\sim \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$*),*
xii) $\mathbb{Z}[i] := \{a + bi : a, b \in \mathbb{Z}\}$ *= egész koordinátájú komplex számok,* *(megj:* $\sim \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$*),*
xiii) $\mathbb{N}^n$, $\mathbb{Z}^n$, $\mathbb{Q}^n$ *(*$n \in \mathbb{N}$*)* *(megj: biz. indukcióval)*
xiv) a véges hosszú, természetes számokból álló sorozatok halmaza, azaz $\mathbb{N}^*$,
xv) $\mathbb{Z}^*$, $\mathbb{Q}^*$,
xvi) összes elképzelhető számítógép program, Turing gép, input-lista, *(megj:* $\sim \mathbb{N}^*$*),*
xvii) $\mathbb{N}[x]$, $\mathbb{Z}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$ *:= természetes-, egész- ill. racionális együtthatójú polinomok halmazai,* *(megj:* $\sim \mathbb{N}^* \sim \mathbb{Z}^* \sim \mathbb{Q}^*$*),*
xviii) $\mathbb{A}$ *:= algebrai számok (:=egész- ill. racionális együtthatójú polinomok gyökei) halmaza, (megj:* $\sim (\mathbb{N}^*)^*$ *),*
xix) $\mathbb{A}[x]$ *:= algebrai számok-együtthatójú polinomok halmazai,* *(megj:* $\sim \mathbb{A}^* \sim \mathbb{N}^*$*),*
xx) $\mathbb{N}$ *összes* véges *részhalmazainak halmaza,*
xxi) $\{a, b\} \to \mathbb{N}$ *típusú függvények halmaza, vagyis* ${}^{\{a,b\}}\mathbb{N}$, *(megj:* $\sim \mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$*),*
xxii) sík rácspontjai (mindkét koordinátájuk egész szám), (megj: $\sim \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ *),*
xxiii) egy adott a_n *sorozat elemeinek halmaza,*
xiv) egy adott $\sum a_n$ *sor* részletösszegei*nek halmaza,*
...
□

5. Kontinuum számosságú halmazok

31. Definíció. $\mathbb{R}$ *számosságát kontinuum*[2] *-nak nevezzük és* $\mathfrak{c}$ *(gót kis c) -vel jelöljük, azaz*

$$\mathfrak{c} := |\mathbb{R}| \; . \quad \square \tag{18}$$

32. Tétel. ***(Cantor)***

$$|\mathbb{R}| > \aleph_0 \tag{19}$$

Bizonyítás. (Cantor átlós módszere.) Tegyük fel indirekte, hogy $\mathbb{R} = \{f_0, f_1, ..., f_n, ...\}$, vagyis e felsorolás tartalmazza az **összes** valós számot. Legyen $q \in \mathbb{R}$ egy olyan valós szám, melynek i -edik tizedesjegye különbözik az f_i szám i -edik tizedesjegyétől. Ekkor $q \neq f_i$, így q nem szerepel a $\{f_0, f_1, ..., f_n, ...\}$ felsorolásban[3]. Ez ellentmondás, vagyis $\mathbb{R}$ elemeit tényleg nem lehet felsorolni. ■

33. Következmény. *Van nem algebrai valós szám (ld. 30.xiii) példa).*
Az ilyen (irracionális) számokat ***transzcendens*** *("túl") számoknak hívjuk.* □

34. Megjegyzés. ***(i) Tetszőleges, legalább kételemű [(a,b)] intervallum (nyílt vagy zárt, véges vagy végtelen, félig vagy egészen) számossága megegyezik*** $\mathbb{R}$ ***számosságával.***
(ii) Tehát minden nem üres, nyilt intervallum tartalmaz transzcendens számot.

---

[2] "folytonos"
[3] A valós számok tizedestörtként való felírása nem egyértelmű, pl. $0,500... = 0,499...$. Ezt a problémát elkerülhetjük, ha q jegyei 0 -tól és 9 -től különbözőek. □

35. Tétel. $|\mathbb{R}| = \left|\underline{2}^{\mathbb{N}}\right|$, *vagy másképpen:* $|\mathbb{R}| = \left|\{0,1\}^{\mathbb{N}}\right|$. $\square$

36. Megjegyzés. *A fenti tétel és Cantor 7 tételéből már következik 32 tétele, de az ott közölt bizonyítás ezeknél egyszerűbb és szemléletesebb.* $\square$

37. Példa. ***Kontinuum számosságú halmazok:***
(o) $[0,1)$ *intervallum,* *(megj:* $\sim \mathcal{P}(\mathbb{N})$*),*
i) bármely $[(a,b)] \subset \mathbb{R}$ *nemüres és nem egyelemű ("nem elfajuló") intervallum (ld. 34),*
pl.: $[5,8]$, $(6,\infty)$, $[5,81]$, $(6,823)$, $(3,4)$, $[7,70]$, $(6,40)$, $(5,8]$, $[7,8]$, $[5,8]$, $(6,\infty)$, $(-\infty,3)$, $(-\infty,\infty)$, ...
ii) az összes bináris ($0,1$ *-ből álló) végtelen sorozat halmaza, azaz* $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$,
(megj: $\sim \mathcal{P}(\mathbb{N})$*),*
iii) egy (akármilyen) n *betűs ABC (=tetszőleges* n *elemű* H *halmaz) elemeiből képzett* végtelen hosszú *szavak (sorozatok) halmaza, azaz* $H^{\mathbb{N}}$*,*
iv) $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ összes *részhalmazainak halmaza, azaz* $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$, $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$,
v) $\mathbb{R}$,
vi) irracionális számok halmaza
vii) $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, *(megj: két tizedesjegy-sorozat jegyeit felváltva leírva ("összefésülve") kapunk egy* $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *bijekciót),*
viii) $\mathbb{C}$ *(komplex számok),* Q *(kvateriók) halmaza* *(megj:* $\mathbb{C} \sim \mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $Q \sim \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$*),*
ix) $\mathbb{R}^n$ *(megj:* $\sim \left(2^{\mathbb{N}}\right)^n \sim 2^{\mathbb{N}\times n} \sim 2^{\mathbb{N}} \sim \mathbb{R}$ *),*
x) $\mathbb{R}^*$
xi) konstans-, lineáris függvények, azaz a c *ill.* $ax+b$ *függvények halmaza,*
xii) $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{C}[x]$ *= valós / komplex együtthatójú polinomok halmazai*
xiii) lineáris racionális törtfüggvények, azaz $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ *alakú függvények halmaza,*
xiv) racionális törtfüggvények (=polinomok hányadosai) halmaza, *(megj:* $\sim \mathbb{R}[x]\times\mathbb{R}[x]$ *),*
xv) $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *függvények halmaza* *(megj:* $\sim$ *természetes/egész/racionális számokból álló sorozatok halmaza),*
xvi) $\mathbb{N}$ *összes permutációjának halmaza,*
xvii) egy adott $\sum a_n$ *sor átrendezéseinek halmaza,* *(megj:* $\sim \mathbb{N}$ *permutációinak halmaza),*
xviii) a végtelen hosszú, természetes / racionális számokból álló sorozatok halmaza, azaz $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$,
xix) valós számsorozatok halmaza, azaz $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, *(megj:* $\sim \left(2^{\mathbb{N}}\right)^{\mathbb{N}} \sim 2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \sim 2^{\mathbb{N}} \sim \mathbb{R}$*),*
xx) egy adott (a_n) *sorozat* részsorozatai*nak halmaza,* *(megj:* $\sim \{0,1\}^{\mathbb{N}} \sim \mathcal{P}(\mathbb{N})$ *),*
xxi) $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos *függvények* *(megj: ld. Koltay-Szalkai: Analízis I. feladatgyűjtemény),*
xxii) sík *(megj:* $\sim \mathbb{R}\times\mathbb{R} \sim \mathbb{C}$*),*
xxiii) körvonal, körlap, szakasz , bármely (ívet [vonalat] tartalmazó) síkbeli részhalmaz, függvénygrafikonok, véges és végtelen síkidomok - ha legalább kettő pontot tartalmaznak,
xxiv) gömbfelület *(megj:* $\sim$ *sík),*
xxv) $\mathbb{R}^n$ *=* n *dimenziós tér,*
...
$\square$

Vigyázat: $\mathbb{R}$ *bármely* részhalmazának számosságát nem tudhatjuk, ezt a problémát a következő fejezetben ismertetjük!

38. Példa. ***Kontinuumnál nagyobb számosságú halmazok:***
i) $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, $\mathcal{P}(\mathbb{C})$,$\mathcal{P}(H)$ *ha* H *legalább kontinuum,* *(megj:* $\mathcal{P}(\mathbb{R}) \sim \mathcal{P}(\mathbb{C}) \sim \mathcal{P}(H)$*),*
ii) $[1,2] \to [1,2]$ *tetszőleges függvények halmaza,* *(megj:* $\sim \mathcal{P}(\mathbb{R})$ *),*
iii) $\mathbb{R} \to \{a,b\}$ *függvények halmaza, azaz* $\{a,b\}^{\mathbb{R}}$ *(megj:* $\sim \underline{2}^{\mathbb{R}} \sim \mathcal{P}(\mathbb{R})$*),*
iv) tetszőleges $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *függvények halmaza, azaz* $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, *(megj:* $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} \sim \underline{2}^{\mathbb{R}} \sim \mathcal{P}(\mathbb{R})$ *),*
...
□

6. A Kontinuum Hipotézis

Láttuk, hogy $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$. Természetesen merül fel a kérdés, hogy van-e olyan $X \subset \mathbb{R}$ halmaz, amelyre

$$|\mathbb{N}| < |X| < |\mathbb{R}| \quad ? \tag{20}$$

A XIX. század végén Georg **Cantor** német matematikus azt sejtette, hogy ilyen X halmaz nincs, ez a "Kontinuum-hipotézis":

39. Definíció. Kontinuum-hipotézis *(*Continuum-hypothesis = *feltevés), röviden* KH *vagy* CH*:* *nincsen olyan* $X \subset \mathbb{R}$ *halmaz, amelyre (20) teljesülne.* □

David **Hilbert** német matematikus a matematikusok 1900 -ban tartott konferenciáján *ezt* a problémát említette elsőnek, a XX század matematikai kutatásait meghatározó 23 nagy matematikai kérdés között. (Hamarosan kiderült, hogy ez a 23 probléma valóban meghatározó volt a XX. században, ld. pl.
HTTP://ALEPH0.CLARKU.EDU/~DJOYCE/HILBERT/PROBLEMS.HTML .)

Az $X \subset \mathbb{R}$ részhalmaz utáni több évtizedes kutatás eredményeképpen létrejött a *leíró halmazelmélet* (*descriptive set theory*).

Kurt **Gödel** német matematikus a 30-as években már bebizonyította, hogy CH **feltételezése** nem okoz ellentmondást a matematika szokásos (ZFC) axiómarendszerében.

A 60-as években pedig Paul **Cohen** amerikai matematikus igazolta, hogy CH **tagadása** sem okoz ellentmondást ZFC -ben.

A fenti két eredmény nem mond ellent egymásnak hanem kiegészítik egymást: tehát CH -t sem cáfolni, sem bizonyítani nem lehet a matematika ZFC axiómarendszerében, vagyis CH **független** (más szóval: **eldönthetetlen**) a matematika eszközeivel.

Gödel már 1930-ban bebizonyította, hogy a matematika *bármely* axiómarendszerében, vagyis nem csak ZFC -ben szükségképpen *léteznek* eldönthetetlen problémák. **Cohen** módszere pedig ma már a matematikus szakon tananyag, már a 70-es években (nem csak halmazelméleti) problémák százairól mutatták meg, hogy függetlenek ZFC -től.

7. A "Számosságok"

40. Tétel. *(**Neumann János**): (i) Tetszőleges (véges vagy végtelen) κ számossághoz létezik **legkisebb**, κ -nál nagyobb λ számosság, azaz $\kappa < \lambda$ de nincs olyan μ amelyre $\kappa < \mu < \lambda$ lenne. Ezt a λ számosságot κ* rákövetkezőjé *-nek (*successor*) nevezzük, és $\boldsymbol{\kappa}^+$ -al jelöljük.*
*Számosságok nélkül, halmazokkal megfogalmazva: tetszőleges (véges vagy végtelen) A halmazhoz létezik olyan B halmaz, melyre $|A| < |B|$ de **semmilyen** C halmazra $|A| < |C| < |B|$.*
*(ii) Számosságok tetszőleges $\{\kappa_i : i \in I\}$ halmazához létezik egyértelműen olyan **legkisebb** λ számosság, melyre*

$$\kappa_i \leq \lambda \quad \forall i \in I \ . \tag{21}$$

Ezt a λ számosságot így jelöljük:

$$\lambda := \lim_{i \in I} \kappa_i \ . \quad \square \tag{22}$$

41. Definíció. *(az "alefek"): Legyen $\aleph_1 := (\aleph_0)^+$ és általában $\aleph_{n+1} := (\aleph_n)^+$ ha $n \in \mathbb{N}$, továbbá legyen $\aleph_\omega := \lim_{n \in \mathbb{N}} \aleph_n$, majd $\aleph_{\omega+1} := (\aleph_\omega)^+$, és így tovább a "végtelenségig".* $\square$

Meglepőek az alábbi összefüggések:

42. Tétel. *Ha κ és λ közül legalább az egyik végtelen számosság, akkor*

$$\begin{aligned} \kappa + \lambda &= \max\{\kappa, \lambda\} \\ \kappa \times \lambda &= \max\{\kappa, \lambda\} \quad . \quad \square \end{aligned} \tag{23}$$

43. Következmény. *$|H^*| = |H|$ tetszőleges H végtelen halmazra.*