VeOktat-Mat...\Analizis...\...\R-helyettesites.tex, 160820.

Dr.Szalkai István, Pannon Egyetem, Veszprém, SZALKAI@ALMOS.UNI-PANNON.HU **:**

A II. típusú helyettesítésről

A módszer általános leírása [SzI-1] 131. oldalán megtalálható. A módszer alkalmazásairól különböző esetekben [BB], [GyZ] és [KSz]-ben olvashatunk, melyeket most röviden összefoglalunk.

Jelölések

1. Definíció. *$R(u,v)$ az u,v változók **racionális törtfüggvényét** (=két polinom hányadosa) jelöli, vagyis általában*

$$R(u,v,...)=\frac{a_{n,m}\cdot u^n\cdot v^m+...+a_{i,j}\cdot u^i\cdot v^j+...+a_{0,0}}{b_{k,\ell}\cdot u^k\cdot v^\ell+...+b_{i,j}\cdot u^i\cdot v^j+...+b_{0,0}} \tag{1}$$

alakú függvény, ahol $n,m,k,\ell\in\mathbb{N}$, $a_{0,0},...,a_{i,j},...,a_{n,m}\in\mathbb{R}$ és $b_{0,0},...,b_{i,j},...,b_{k,\ell}\in\mathbb{R}$ tetszőleges valós számok.

Megengedett a $k,\ell=0$ és $b_{0,0}=1$ speciális eset is, amikor

$$R(u,v,...)=a_{n,m}\cdot u^n\cdot v^m+...+a_{i,j}\cdot u^i\cdot v^j+...+a_{0,0} \tag{2}$$

mindössze egy polinom.

Hasonlóak az $R(u)$, vagyis

$$R(x)=\frac{a_n\cdot x^n+...+a_i\cdot x^i+...+a_0}{b_k\cdot x^k+...+b_i\cdot x^i+...+b_0} \tag{3}$$

egyváltozós, az $R(u,v,w)$ háromváltozós és stb. többváltozós racionális törtfüggvények is, és ekkor is megengedett a "nevező=1", vagyis "R=polinom" speciális eset.

Használatos még az $r(...)$ jelölés is. $\square$

2. Definíció. *Tetszőleges $f(x),g(x)$ függvényekre*

$$R(f(x),g(x))=\frac{a_{n,m}\cdot f^n(x)\cdot g^m(x)+...+a_{i,j}\cdot f^i(x)\cdot g^j(x)+...+a_{0,0}}{b_{k,\ell}\cdot f^k(x)\cdot g^\ell(x)+...+b_{i,j}\cdot f^i(x)\cdot g^j(x)+...+b_{0,0}} \tag{4}$$

*az R és f,g függvényekből képzett (egyváltozós) **összetett függény.***
(Itt is megengedett a $k,\ell=0$ és $b_{0,0}=1$ speciális eset.)
A továbbiakban $R(f(x),g(x))$ helyett legtöbbször egyszerűen csak $R(f,g)$ -et írunk. $\square$

3. Példa.

$$R\left(e^{x}\right)=\frac{a_{n,m}\cdot e^{nx}+...+a_{i,j}\cdot e^{ix}+...+a_{0,0}}{b_{k,\ell}\cdot e^{kx}+...+b_{i,j}\cdot e^{ix}+...+b_{0,0}}\ , \tag{5}$$

$$R\left(\sin,\cos\right)=\frac{a_{n,m}\cdot\sin^{n}\left(x\right)\cdot\cos^{m}\left(x\right)+...+a_{i,j}\cdot\sin^{i}\left(x\right)\cdot\cos^{j}\left(x\right)+...+a_{0,0}}{b_{k,\ell}\cdot\sin^{k}\left(x\right)\cdot\cos^{\ell}\left(x\right)+...+b_{i,j}\cdot\sin^{i}\left(x\right)\cdot\cos^{j}\left(x\right)+...+b_{0,0}}\ .\quad\square \tag{6}$$

Alkalmazások

Az alábbiakban felsorolt módszerek szemléltetésére és gyakorlására [KSz], [GJ] és [BB] -ben találunk példákat.

0) Általános "ráérzések" a II. típusú helyettesítésekre:

Ha az integrandusban valami "rész-képlet" sokszor szerepel (vagyis a feladat $\int f\left(g\left(x\right)\right)dx$ alakú), akkor az $u=g\left(x\right)$ helyettesítés a megoldás.

Nagyon sok $\int\sqrt{f\left(x\right)}dx$ feladat az $u=\sqrt{f\left(x\right)}$ helyettesítéssel oldható meg.

Például: $\int\sin\left(\sqrt{x}\right)dx$, $\int\sqrt{x}\cdot e^{x\cdot\sqrt{x}}dx$, $\int\frac{arctg\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}+x\cdot\sqrt{x}}dx$, $\int\sqrt{e^{x}-1}$, $\int\sqrt{1-\sin\left(x\right)}dx$.

A következő 1)-6) pontokban felsorolt esetekben az integrandus (4) alakú $R\left(f,g\right)$ összetett függvény, speciális $f\left(x\right)$ és $g\left(x\right)$ függvényekre, amiket röviden felsorolunk. Megfelelő helyettesítés hatására az (4) alakú integrandusból (3) alakú racionális törtfüggvény lesz, ezeket a helyettesítéseket "*Racionalizó módszerek*" -nek is nevezzük.

A kapott $R\left(x\right)$ racionális törteket parciális törtekre bontjuk (lásd pl. [Sz-2]) és utána egyszerűen integrálunk. Hasonlóan integrálhatóak az (1) alakú és többváltozós racionális törtfüggvények is (a (2) alakú polinomok integrálása egyszerű alapfeladat).

1) $R\left(e^{x}\right)$ **alakú integrandusok** (ld.(5)).

Használjuk az $e^{x}=u$ helyettesítést. Ekkor $\frac{dx}{du}=\frac{1}{u}$, és

$$\int R\left(e^{x}\right)\ dx=\int R\left(u\right)\cdot\frac{1}{u}\ du\quad . \tag{7}$$

Ne feledjük, hogy a hiperbolikus függvények is $R\left(e^{x}\right)$ alakúak:

$$sh\left(x\right)=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\ ,\quad ch\left(x\right)=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\ , \tag{8}$$

$$th\left(x\right)=\frac{sh\left(x\right)}{ch\left(x\right)}=\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}\ ,\quad cth\left(x\right)=\frac{ch\left(x\right)}{sh\left(x\right)}=\frac{e^{x}+e^{-x}}{e^{x}-e^{-x}}\ , \tag{9}$$

tehát az $R\left(sh,ch,th,cth\right)$ alakú függvények (kis átalakítás után) $R\left(e^{x}\right)$ alakúak (lesznek).

2)a) $\int R\left(\sin\left(x\right)\right)\cdot\cos\left(x\right)$ és $\int R\left(\cos\left(x\right)\right)\cdot\sin\left(x\right)$ **alakú integrandusok.**

Mivel $\sin'(x) = \cos(x)$ és $\cos'(x) = -\sin(x)$, ezért a fenti feladatok I. típusú helyettesítések, tehát $R(t)$ alakú racionális törtfüggvények (lásd (3)).

b) $\int \sin^n(x) \cdot \cos^m(x) \ dx$ (n vagy m egyike páratlan természetes szám) **alakú integrandusok.**

Ezek a feladatok elemi /"középiskolás"/ lépésekkel I. típusú helyettesítésekké, vagyis 2)a) alatti feladatokká alakíthatók.

3) $R(\sin, \cos)$ **alakú integrandusok** (ld. még 4)).

Használjuk a $t = tg\left(\frac{x}{2}\right)$ (!) helyettesítést.

Ekkor $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{2}{1+t^2}$, $\sin(x) = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos(x) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $tg(x) = \dfrac{2t}{1-t^2}$ és $ctg(x) = \dfrac{1-t^2}{2t}$.

Vigyázat: Bár a 3) pontban említett helyettesítés *bármilyen* $R(\sin, \cos)$ integrandusra működik, de speciális R törtfüggvényekre egyszerűbb (kisebb képleteket és kevesebb számolást igénylő) módszerek is vannak, mint például a 2) és a 4) pontokban említett esetek.

4) $R\left(\sin^2, \cos^2\right)$ és $R(tg)$ **alakú integrandusok**.

Használjuk a $t = tg(x)$ helyettesítést.

Ekkor $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{1+t^2}$, $\sin^2(x) = \dfrac{t^2}{1+t^2}$ és $\cos^2(x) = \dfrac{1}{1+t^2}$.

5) $R\left(x, \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right)$ **alakú integrandusok**

($n \in \mathbb{N}^+$ pozitív és $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ (majdnem) tetszőleges számok, $c = 0$ és $d = 1$ megengedett)**.**

Használjuk a $t = \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$ helyettesítést.

Ekkor $t^n = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, $x = \dfrac{-d \cdot t^n + b}{c \cdot t^n - a}$ és $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{nt^{n-1} \cdot (ad-bc)}{(a-ct^n)^2}$.

6) $R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)$ **alakú integrandusok** ($a \neq 0$)**.**

Elemi átalakításokkal $R\left(u, \sqrt{1-u^2}\right)$ vagy $R\left(u, \sqrt{1+u^2}\right)$ vagy $R\left(u, \sqrt{u^2-1}\right)$ alakhoz jutunk. A különböző esetekben a következő helyettesítéseket használhatjuk:

$R\left(u, \sqrt{1-u^2}\right)$ esetén legyen $u = \sin(t)$, ekkor $\sqrt{1-u^2} = \cos(t)$ és $\dfrac{du}{dt} = \cos(t)$, így 3) alatti problémához jutunk.

$R\left(u, \sqrt{1+u^2}\right)$ esetén legyen $u = sh(t)$, ekkor $\sqrt{1+u^2} = ch(t)$ és $\dfrac{du}{dt} = ch(t)$, így 1) alatti problémához jutunk.

$R\left(u, \sqrt{u^2-1}\right)$ esetén legyen $u = ch(t)$, ekkor $\sqrt{u^2-1} = sh(t)$ és $\dfrac{du}{dt} = sh(t)$, így 1) alatti problémához jutunk.

Javasolt irodalom

[BB] **Bárczy Barnabás**: *Integrálszámítás*, "Bolyai könyvek"-sorozat, Műszaki Kiadó.

[GJ] **Gróf József:** *Ajánlott feladatsorok*, kézirat, Pannon Egyetem.

[GyZ] **Gyöngyösi Zsolt:** *A primitív függvény keresésének módszerei, avagy a "Nagy receptkönyv"*, http://www.stud.u-szeged.hu/Gyongyosi.Zsolt/recept1.pdf

[KSz] **Koltay László, Szalkai István**: *Matematika* I. *feladatgyűjtemény,* Pannon Egyetem Kiadó,

[SzI-1] **Szalkai István**: *Szemléletes Analízis* I., tankönyv,
http://www.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop412A/2010-0012_szemleletes_analizis/adatok.html
vagy http://math.uni-pannon.hu/~szalkai/Anal-Tk1B-c.pdf ,

[SzI-2] **Szalkai István**: *Az Algebra Alaptétele és a parciális törtekre bontás módszere*, http://math.uni-pannon.hu/~szalkai/ParcTort-pdfw.pdf