A parciális törtekre bontás módszere

Használatos még az *elemi*- vagy *résztörtek* elnevezés is. A *parciális* szó latin eredetű, jelentése ”részleges, nem egész” .

Cél: *Az*

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x^1 + b_0}$$

alakú függvények (*ún*. **racionális törtfüggvények** = *két polinom hányadosa*) *legegyszerűbb nevezőjű törtek összegére történő bontása*.

Felhasználása: integrálszámítás (primitív függvények keresése); függvények sorbafejtése (hatványsorok); Laplace transzformációnál (állandó együtthatójú lineáris differenciálegyenletek); a generátorfüggvény módszernél; s.í.t. ...

0. **LÉPÉS**: *Legyen a számláló fokszáma kisebb, mint a nevező fokszáma*!

Ha ez nem teljesül (azaz a számláló legalább akkora fokszámú, mint a nevező), akkor (polinomosztással) a számlálót elosztjuk a nevezővel, azaz meghatározzuk azon $r(x)$ és $s(x)$ polinomokat, amelyekre

$$p(x) = q(x) \bullet s(x) + r(x)$$

és $r(x)$ fokszáma kisebb mint $q(x)$ fokszáma. Ekkor $f(x)$ a következő alakban írható(footnote):

$$f(x) = \frac{r(x)}{q(x)} + s(x)$$

A továbbiakban feltesszük, hogy a számláló fokszáma kisebb, mint a nevező fokszáma (azaz csak az $\frac{r(x)}{q(x)}$ alakú taggal foglalkozunk) !

I. **LÉPÉS**: *A nevezőt a lehető legjobban szorzattá bontjuk, és az azonos szorzótényezőket összegyűjtjük*.

Felhívjuk a figyelmet: most kell eldöntenünk, hogy az alábbiakban (mindvégig) valós vagy komplex számokkal kívánunk számolni ! A valós és a komplex számok közötti különbséget az Algebra Alaptételének két változata világítja meg:

Algebra Alaptétele: **1**) (valós) változat: *Tetszőleges valós együtthatójú polinom* (*lényegében egyértelmű módon*(footnote)) *felbontható* legfeljebb másodfokú *valós együtthatójú polinomok szorzatára*. □

2) (komplex) változat: *Tetszőleges komplex együtthatójú polinom* (*lényegében egyértelmű módon*) *felbontható* elsőfokú *komplex együtthatójú polinomok szorzatára*. □

A fenti tételből következik, hogy a nevező szorzótényezői az alábbi típusúak lehetnek:

1) (valós) esetben: négy típus, mint: $(x - u)$, $(x - v)^n$, $(ax^2 + bx + c)$, $(dx^2 + ex + f)^m$ (”elsőfokú”, ”elsőfokú hatványa”, ”másodfokú” és ”másodfokú hatványa”).

2) (komplex) esetben: csak a fenti első két típus lehetséges.

Módszerek a szorzótényezők meghatározására:

— a nevező $x = \gamma$ gyökeinek meghatározása(footnote) (gyökképlettel(footnote) vagy *intervallum felezéses* módszerrel), majd az $(x - \gamma)$ gyöktényezők kiemelése polinomosztással(footnote) .

— próbálkozás módszere: keressük azon $r(x)$ és $s(x)$ polinomok együtthatóit amelyekre $q(x) = r(x)s(x)$. Ehhez alkalmazhatjuk a behelyettesítés módszerét, vagy az egyenlő együtthatók (más néven az együtthatók összehasonlítása) módszerét.

II. LÉPÉS: *Parciális törtekre bontás*.

1) valós esetben:
Ha

$$f(x) = \frac{p(x)}{(x-u_1)\bullet\ldots(x-v_1)^{n_1}\bullet\ldots(a_1x^2+b_1x+c_1)\bullet\ldots(d_1x^2+e_1x+f_1)^{m_1}\bullet\ldots}$$

alakú, akkor a keresett parciális törtek nevezői pontosan a nevező szorzótényezői, míg számlálói a nevezőknél alacsonyabb fokszámú polinomok, azaz

$$\begin{aligned} f(x) = {} & \frac{A_1}{x-u_1} + \ldots + \frac{B_{1,1}}{(x-v_1)} + \frac{B_{1,2}}{(x-v_1)^2} + \ldots + \frac{B_{1,n_1}}{(x-v_1)^{n_1}} + \ldots \\ & + \frac{C_1x+D_1}{a_1x^2+b_1x+c_1} + \ldots \\ & + \frac{E_{1,1}x+F_{1,1}}{(d_1x^2+e_1x+f_1)} + \frac{E_{1,2}x+F_{1,2}}{(d_1x^2+e_1x+f_1)^2} + \ldots + \frac{E_{1,m_1}x+F_{1,m_1}}{(d_1x^2+e_1x+f_1)^{m_1}} \\ & + \ldots \end{aligned}$$

ahol a számlálókban szereplő $A_t , B_{i,j} , C_r , D_r , E_{k,l} , F_{k,l} \in \mathbb{R}$ $(t \le T , j \le n_i , i \le I , r \le R , l \le m_k , k \le K)$ valós számokat kell meghatároznunk.

2) komplex esetben: csak az első két típus lehetséges, a nagybetűk komplex számokat jelölnek.

TÉTEL: A fenti nagybetűkkel jelölt számok léteznek és egyértelműek. □

MÓDSZEREK *a számlálók(ban szereplő) valós/komplex számok meghatározására*:
Közös nevezőre hozás után csak az egyenlet két oldalán szereplő két tört számlálóinak egyezését kell biztosítanunk.
– *behelyettesítés módszere*: x helyére megfelelő számú tetszőleges (jól megválasztott) valós vagy komplex számokat helyettesítve a nagybetűkre, mint ismeretlenekre lineáris egyenletrendszert kapunk.
– *egyenlő együtthatók* (*együtthatók összehasonlítása*) módszere: A két számláló egy-egy polinom. Az algebra alaptételének (egyik) következménye: ”Két polinom akkor és csak akkor egyezik meg, ha összes (megfelelő) együtthatóik megegyeznek”. Vagyis az egyenlet két oldalán szereplő polinomokban a megfelelő együtthatókat megkeresve és páronként ”egyenlővé téve” ismét lineáris egyenletrendszert kapunk a nagybetűkre, mint ismeretlenekre.