.

Mintapl2b.tex, 2009.07.25., 12:25'

Analízis mintapéldák vizsgára és szigorlatra

dr. Szalkai István
szalkai@almos.uni-pannon.hu
http://193.6.42.1/~szalkai/

2009.07.25.

Kidolgozott feladatok találhatók a *Pannon Egyetem Könyvtára* honlapján:
http://web.uni-pannon.hu ,
menü baloldalon: "*Egyetemi könyvtár és Levéltár honlapja*"
almenü: "*Digitool:* egyetemi jegyzetek és egyéb multimédiás források gyűjteménye" ... ... "Tananyagok - Matematika " ...

Analízis I.

Valós számsorozatok (monotonitás, korlátosság, határérték)

1. Vizsgálja meg az alábbi sorozatokat *monotonitás* szempontjából:

$(\sin(1))^n$, $\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n+4}\right)$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1}{n^3}}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}$.

2. Vizsgálja meg az alábbi sorozatokat *korlátosság* szempontjából:

$\sqrt[n]{3+(-1)^n}$, $\frac{4^n-2^n}{4^n+2^n}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin(n)}{n}$.

3. Számítsa ki az alábbi sorozatok *határértékeit*:

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+5}{10^3\cdot n}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{34n^3+0.1n^2-3n+8}{2n^4-4n^2+512n+99}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n+4}\right)$, $\lim\limits_{n\to\infty}0.77...7$,

$\lim\limits_{n\to\infty}\sin(n)\cdot\frac{9n+10}{n^2+1}$, $\lim\limits_{n\to\infty}(n^2-n+5)$, $\lim\limits_{n\to\infty}(n^5-n^3)$, $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\,\frac{n+3}{2n-1}$.

4.a) Az $\varepsilon=10^{-7}$ hibahatárhoz adjunk meg egy N küszöbszámot:

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+2}{3n-4}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2}{n^2+1}$, $\lim\limits_{n\to\infty}n^{-0.5}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{10^{n+1}-320}{10^{n-1}+9}$.

b) A $P=10^7$ korláthoz adjunk meg egy N küszöbszámot:

$\lim\limits_{n\to\infty}(3.11)^n$, $\lim\limits_{n\to\infty}(3n^2+n)$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-1}{3\cdot\sqrt{n}+2}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+5}{10^3\cdot n}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[2]{n}$.

5. A *Rendőrelv* alkalmazásával határozza meg az alábbi határértékeket:

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2+3n-1}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{5^n-4^n+n}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2+n}{3+7n}}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{8^n+9^n}{10^n}}$.

6. Használja fel a $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{s}{n})^n=e^s$ eredményt a következő feladatokban:

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-2}{n}\right)^n$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+3}\right)^n$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n+5}{3n}\right)^n$.

Egyváltozós függvények

Inverz függvény

1. Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi függvényeknek van-e inverze, és adjuk meg az inverzfüggvényt (és annak értelmezési tartományát is):

$\sqrt[3]{1-x^3}$, $\quad 1+\sqrt{x-2}$, $\quad \frac{2x}{1+x^2}$, $\quad \frac{2-x}{1+x}$, $\quad \ln(x^2-1)$ ahol $x \in (-\infty; -2)$.

2. Adjuk meg az alábbi függvények olyan leszűkítését, amely invertálható! Ábrázoljuk a függvényt és annak inverzét közös koordinátarendszerben:

$2x-x^2$, $\quad \frac{1}{1+x^2}$, $\quad \sqrt{1-x^2}$, $\quad \frac{3}{2-\sqrt{x-2}}$, $\quad \frac{3}{2+\sqrt{x-2}}$.

Összetett függvény

1. Adjuk meg az $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ és $g \circ g$ függvényeket:

$f(x) = x^2$ és $g(x) = x - 1$, $\qquad f(x) = \sqrt{x}$ és $g(x) = x^3 + 1$,

$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ és $g(x) = \sin(x)$,

$f(x) = \exp(4x^2 - 1) \quad x \in [-1; 3]$ és $g(x) = 1 - 2x \quad x \in [0; 2]$

$f(x) = 1 - x^2 \quad x \in [0; 1]$ és $g(x) = \mathrm{tg}|_{]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[}(x)$

$f(x) = \cos(x)$ és $g(x) = \arcsin(x)$,

$f(x) = \sin(x)$ és $g(x) = \arccos(x)$.

Határérték, folytonosság

1. Az alábbi példákban a felírt határérték ellenőrzéséhez keressük meg az a hely megfelelő (általánosított) környezetét (a lim definíciója alapján):

a) $\lim\limits_{x\to 1} x(x-3) = -2 \qquad \varepsilon = 3,\ 0.5,\ 0.01$,

b) $\lim\limits_{x\to 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} = 4 \qquad \varepsilon = 3,\ 0.1,\ 0.001$,

c) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{1-x}{x^2-6x+9} = -\infty \qquad K = -9,\ -49,\ -100$,

d) $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{1}{2^x-1} = +\infty \qquad K = 10,\ 50,\ 100$,

e) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x^2-4}{x^2} = 1 \qquad \varepsilon = 1,\ 0.25,\ 0.01$,

f) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0 \qquad \varepsilon = 1,\ 0.05,\ 0.01$,

g) $\lim_{x\to+\infty}(x-x^2)=-\infty \qquad K=-8,\ -18,\ -5000$,

h) $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-2x}=+\infty \qquad K=10,\ 20,\ 100$.

2. Határozzuk meg a következő függvények határértékét az adott helyeken!

$\lim_{x\to a}\frac{1-x}{x^2-4x+4} \qquad a=1,\ 2,-\infty,+\infty, \qquad \lim_{x\to a}\frac{2x^2-5x+3}{-4+8x-4x^2} \qquad a=0,\ 1,-\infty,+\infty,$

$\lim_{x\to a}\frac{2\sqrt{x}-5\sqrt{x}}{3\sqrt{x}} \qquad a=0+,\ 1,\ +\infty$.

3. Határozzuk meg a következő határértékeket:

$\lim_{x\to0}\frac{x^2-2x}{x^3+x} \qquad \lim_{x\to-2}\frac{x^2-4}{x^2+3x+2} \qquad \lim_{x\to-1}\frac{x^3+x^2-4x-4}{x^3-2x^2-x+2} \qquad \lim_{x\to3}\frac{x^2-9}{\sqrt{x}-\sqrt{3}} \qquad \lim_{x\to2-}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{x}}{\sqrt{4-x^2}},$

$\lim_{x\to-2}\frac{\sqrt{x+3}-1}{\sqrt{x+6}-2}\ , \qquad \lim_{x\to3}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{(x-3)^2}\right) \qquad \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-1}\right)\ ,$

$\lim_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt[3]{1-x^2}\right) \qquad \lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\ , \qquad \lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{x}\ , \qquad \lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{\sin\frac{x}{2}}\ ,$

$\lim_{x\to\pi}\frac{\pi-x}{\sin x} \qquad \lim_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}\ , \qquad \lim_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}x}{x} \qquad \lim_{x\to0}x^2\operatorname{ctg}2x\ , \qquad \lim_{x\to1}\frac{\operatorname{tg}\pi x}{x-1}\ ,$

$\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{arctg}2x}{\sin 3x}\ , \qquad \lim_{x\to0}\frac{x^2}{1-\cos^2 x} \qquad \lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x} \qquad \lim_{x\to0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{2x^2} \qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}\ ,$

$\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{x} \qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{e^{\cos x}-1}{\cos x} \qquad \lim_{x\to0}\frac{\ln(x+1)^2}{x} \qquad \lim_{x\to0}\frac{\ln(\cos x)}{x}\ , \qquad \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^x\ ,$

$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^{2x+1} \qquad \lim_{x\to0}\left(\frac{x^2-4}{x^2}\right)^x \qquad \lim_{x\to0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}\ , \qquad \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{x}\right)^x\ ,$

$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+1}{x}\right)^x\ , \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}\ , \qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos x\cdot\frac{\sin^2\frac{2}{2x-\pi}}{1+x^2}\ , \qquad \lim_{x\to0}\frac{x}{5+2^{\sin\frac{1}{x}}}\ ,$

$\lim_{x\to+\infty}\sqrt[x]{2^x+\pi} \qquad \lim_{x\to+\infty}\sqrt[x]{x^2+3x-1} \qquad \lim_{x\to0+}(10-\ln x)^{\frac{1}{\ln x}}$.

4. Ellenőrízzük az alábbi függvények folytonosságát, az adott ε értékhez keressük az x_0 hely megfelelő környezetét:

$f(x)=x^2 \qquad x_0=0.1 \quad \varepsilon=0.2,\ 0.01,\ 0.001$,

$g(x)=\frac{1}{x-1} \qquad x_0=2 \quad \varepsilon=0.1,\ 0.05,\ 0.01$.

5. Hol folytonosak az alábbi függvények:

$f(x)=\frac{x-1}{x^2+1} \quad x\in\mathbb{R}\ , \qquad f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & \text{ha } x\neq0\\ 0 & \text{ha } x=0\end{cases}\ ,$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x+1}{x^3+1} & \text{ha } x\neq -1\\ 3 & \text{ha } x=-1\end{cases}\ ,\qquad f(x)=\begin{cases}x^2 & \text{ha } x\in\mathbb{Q}\\ 0 & \text{ha } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}\ .$$

6. Hogyan válasszuk meg c értékét, hogy az alábbi függvények folytonosak legyenek az x_0 pontban?

$$f(x)=\begin{cases}\frac{e^x-e^{-x}}{x} & \text{ha } x\neq 0\\ c & \text{ha } x=0\end{cases}\ ,\quad x_0=0\ ,$$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1-x}{1-\sqrt{x}} & \text{ha } x\in[0;1[\\ c\cdot x+1 & \text{ha } x\in]1;+\infty[\end{cases}\ ,\quad x_0=1\ ,$$

$$f(x)=\begin{cases}x^2+c & \text{ha } x\in]-\infty;0[\\ \frac{\sqrt{x}}{\operatorname{tg} x} & \text{ha } x\in[0;\frac{\pi}{2}[\end{cases}\ ,\quad x_0=0\ .$$

7. Igazoljuk, hogy az egyenletnek van megoldása az adott intervallumban:

$x+1=\operatorname{tg} x \qquad x\in[0;\frac{\pi}{2}[$,

$x^7-x^5+x+10=0 \qquad x\in]-\infty;+\infty[$.

- - - Elemi függvények

###

Differenciálszámítás

Alapok

1. Az x_0 pontokban adjuk meg az adott függvényhez a *differencia- (különbségi-) hányadost* és annak limeszeként a deriváltat (differenciálhányadost):

$f(x)=x^2\ ,\quad x_0=-2,\ 2\ ,\qquad g(x)=\sqrt[3]{x}\qquad x_0=8,\ 0\ ,$

$h(x)=\ln x\qquad x_0=1,\ e$

2. Differenciálható-e az adott függvény az adott x_0 pontban:

$f(x)=|x|\qquad x_0=0,\ 1\ ,\qquad g(x)=\sqrt[3]{1-x^3}\ ,\ x_0=1$

$$h(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x} & \text{ha } x\neq 0\\ 0 & \text{ha } x=0\end{cases}\ ,\quad x_0=0\ ,$$

$$j(x) = \begin{cases} x^2 & \text{ha } x \le 2 \\ 2x+1 & \text{ha } x > 2 \end{cases} , \qquad x_0 = 2$$

$$k(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \in \mathbb{Q} \\ x^2 & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \qquad x_0 = 0,\ \pi\ .$$

3. Állapítsa meg, hol deriválhatóak az alábbi függvények, és ott adja meg deriváltfüggvényeikett ("formális" deriváltjukat):

$\sqrt[3]{x} - 10\sin x + \frac{\arcsin x}{2} + \sqrt{\pi}$, $\quad \frac{x^4+2x^2+1}{x^2-5x+5}$, $\quad \frac{x^3-x}{\sqrt[5]{x}} - \frac{1}{2x}$, $\quad \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$,

$\sin^2 x + \sin x^2 + x^x$, $\quad \ln|x|$, $\quad \sqrt{e^{x^2-2x+\pi}}$, $\quad \sqrt[3]{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 2x}$,

$\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{5\operatorname{tg}\frac{x}{2}+4}{3}$, $\quad \frac{1}{2}\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\frac{\cos x}{\sin^2 x}$, $\quad \frac{e^x\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{\ln(1-\ln x)}$, $\quad \sqrt{x^2\cdot\sqrt[3]{\frac{x^4}{x^2}\cdot\sqrt[4]{(x^3)^2}}}$.

A derivált geometriai és fizikai jelentése, alkalmazásai

1. Írja fel az alábbi függvények adott pontbeli érintőjének egyenletét:

$f(x) = 2x^4 - x^3 + 5x + 2$, $\quad P(7; 4496)$,

$g(x) = arctg(x)$, $x_0 = 1$, $\quad h(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $x_0 = 3$.

2. Húzzon érintőt az alábbi függvényekhez az adott *külső* pontból:

$y = \sqrt{x}$, $Q(-1,0)$, $\quad y = e^x$, $Q(-1,0)$, $\quad y = \lg(x)$, $Q(0,-2)$.

3. Keresse meg az alábbi függvények *adott meredekségű* érintőit:

$f(x) = 2x^3 + 5x^2 + 6x - 8$, $m = 2$, $\quad g(x) = tg(x)$, $\quad m = 3$,

$h(x) = arctg(x)$, $\quad m = 1/3$.

4. Számítsa ki az alábbi görbék hajlásszögét (érintőik szögét) a görbék metszéspontjában.

$f(x) = 2x^3 + 5x^2 + 6x - 8$ és $g(x) = 2x^3 - 7x^2 - 4x$,

$f(x) = \frac{1+2x}{1-3x}$ és $g(x) = 7 - \frac{x}{4}$.

L'Hospital szabályok

Számítsuk ki az alábbi határértékeket L'Hospital szabályainak alkalmazásával:

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln(x)}{x-1}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\pi/2-arctg(x)}{e^{-x}}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^{10}}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(ch(x))}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin(x)}\right)$,

$\lim\limits_{x\to 0+0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$, $\lim\limits_{x\to-\infty}x\cdot e^x$, $\lim\limits_{x\to 0+0}x\cdot e^{1/x}$, $\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\ln(x)$, $\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\ln^2(x)$,

$\lim\limits_{x\to 0+0}x^x$, $\lim\limits_{x\to 0+0}x^{\frac{x}{1-x}}$, $\lim\limits_{x\to 0+0}x^{\sin(x)}$, $\lim\limits_{x\to\infty}x^{1/x}$, $\lim\limits_{x\to\infty}ch(x)^{1/x}$,

$\lim\limits_{x\to 0+0}(1-x)^{\ln(x)}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{s}{x}\right)^x$, $\lim\limits_{x\to 0+0}(1+3x^2)^{1/x^2}$, $\lim\limits_{x\to\pi/2+0}(\sin(x))^{tg(x)}$.

Részletes függvényvizsgálat

Részletesen vizsgáljuk meg és vázoljuk a következő függvényeket:

x^5-3x^2 , $7-8x^2+x^4$, $x^3+\frac{48}{x}$, $8\cdot\frac{x+1}{(x-1)^2}$, $\frac{x^2+1}{x-1}$, $\frac{2x^3}{x^2+x-2}$,

$\sqrt[3]{x^3-1}$, $(2x-1)\sqrt[3]{(x+2)^2}$, $\frac{x}{\sqrt[3]{1-x^2}}$, $\frac{x}{e^{\sqrt{x}}}$, $e^{\frac{1-x}{1+x}}$, $e^{-6+5x-x^2}$,

$x^2\ln x$, $x\ln(e+\frac{1}{x})$, $2\sin x+\sin 2x$, $1-\sin^2 x-3\cos x$,

$1+x-\cos^2 x$, $\frac{1}{1-\sin x}$, $\arccos\frac{1}{x}$, $e^{\operatorname{arctg} x}$.

Szöveges szélsőértékszámítás

1. Melyik a legnagyobb területű téglalap, aminek a kerülete 100m ?

2. Egy 10 cm × 20 cm méretű téglalap alakú lemezből akarunk a lehető legnagyobb térfogatú felül nyitott téglatest alakú dobozt készíteni, a sarkokból történő négy egybevágó négyzet kivágása után, az oldalak felhajtásával. Mekkora legyen a kivágott négyzetek oldala?

3. Milyen magas és milyen átmérőjű legyen az a 100 l térfogatú henger alakú tartály, melynek felszíne a legkisebb?

4. Honnan kell kapura lőnie a labdarúgó pálya szélén lévő játékosnak, hogy a kapu eltalálása a legkönnyebb legyen, vagyis ahonnan legnagyobb szögben látja a 7.23 m széles gólvonalat, ami az oldalvonaltól 20 m távolságra van.

5. Hogyan juthat a medence szélén álló úszómester legrövidebb idő alatt a bajbajutotthoz, ha az tőle (a medence szélén mérve) 23 m távolságra ugrott a vízbe, és már a medence szélétől 8 m távolságra van? Az úszómester a parton $2\frac{m}{s}$ sebességgel szalad, a vízben $0.7\frac{m}{s}$ sebességgel úszik.

Taylor- polinomok

1. Írja fel az $f(x)$ függvény x_0 pont körüli n -edrendű Taylor- ill. McLaurin-polinomját és a hozzá tartozó (Lagrange-féle) hibatagot:

a$_1$) $f(x) = 3x^5 - 5x^2 + 7x + 2$, $x_0 = 2$, $n = 3$ ill. $n = 6$,

a$_2$) $f(x) = 3x^5 - 5x^2 + 7x + 2$, $x_0 = 0$, $n = 3$ ill. $n = 6$,

b) $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$, $n = 7$,

c) $f(x) = \ln x$, $x_0 = 1$, $n = 7$,

d) $f(x) = arctg\,(x)$, $x_0 = 0$, $n = 4$,

2. Számítsuk ki az alábbi számok közelítő értékét egy megfelelő függvény *érintője* majd másodrendű Taylor-polinomja (=*érintő parabola*) segítségével, és becsüljük meg mindkét esetben a hibát:

$\ln(1,1)$, $\sin(0,15^{rad})$, $\sqrt[5]{35}$, $arctg(0,9)$.

A keresett értékeket számológéppel is számoljuk ki, és hasonlítsuk össze a fenti közelítéssel!

3. Számítsuk ki az alábbi számok közelítő értékét a megadott pontossággal:

a) $\ln(1,5)$, $\varepsilon = 10^{-3}$,

b) $\cos(0,6^{rad})$, $\varepsilon = 10^{-5}$,

c) $\sqrt[5]{39}$, $\varepsilon = 10^{-3}$.

Primitív függvények

1. Számítsa ki az alábbi alapintegrálokat:

$\int \left(3x^3 + 4x^2 - 7x + \frac{2}{x} + \frac{3}{1-x} - \frac{2}{x^2}\right) dx$, $\int \frac{3}{5-6x} dx$, $\int \sqrt{3+8x}\, dx$,

$\int \frac{2}{\sqrt[3]{5x}} dx$, $\int (2+x)^5\, dx$, $\int \exp(2x+9) dx$, $\int (0.9)^{1-x}\, dx$,

$\int \sin(2-3x) dx$, $\int \frac{1}{\cos^2(7x)} dx$, $\int \frac{3}{\sin^2(5+5x)} dx$, $\int \frac{3}{1+x^2} dx$.

2. Előzetes átalakítások után számítsa ki az alábbi integrálokat:

$\int \frac{8}{1-x^2}dx$, $\int \sqrt{x\sqrt[5]{x^2}}dx$, $\int \frac{4x^3+2x^2-3x+2-4/x}{\sqrt[3]{x^5}}dx$, $\int \frac{x^2}{4x^2+1}dx$,

$\int \frac{3}{7+7x^2}dx$, $\int \frac{x^2+1}{x^2-1}dx$, $\int \frac{5x-2^x}{7x\cdot 2^x}dx$, $\int \cos^2(x)dx$,

$\int \sin^2(2+3x)dx$, $\int \sin(x)\cos(x)dx$, $\int ch^2(x)dx$, $\int sh^2(x)dx$.

3. Számítsa ki az adott pontban eltűnő *primitív függvényeket*:

$\int_3 \sqrt{2x}\, dx$, $\int_{-7} \sin(2x-1)dx$, $\int_{-2} (2x+8)^{3.7}\, dx$.

4. Használja a parciális integrálás szabályát:

$\int x\sin(3x)dx$, $\int (x+2)\exp(-x)dx$, $\int (x+2)^8\,(2x-3)\,dx$,

$\int (x^2+5x-2)\cos(7x)dx$, $\int (x^2+5x)\,sh(2x)dx$, $\int x^2\cdot 2^x dx$,

$\int x\cdot arctg(x)dx$, $\int (x^2+x)\ln(x)dx$, $\int \ln(x)dx$, $\int arctg(x)dx$,

$\int \arcsin(x)dx$, $\int \ln^2(x)dx$, $\int xe^{-x}dx$, $\int e^{-2x}\sin(3x)dx$,

$\int \sin(2x)\cos(x/2)dx$, $\int \sin(x+2)\sin(3x-1)dx$, $\int e^{3x+2}\cdot 2^{-x+1}dx$.

5. Használja az I. típusú helyettesítés speciális eseteit:

$\int \frac{\ln(x)}{x}dx$, $\int \frac{arctg(x)}{1+x^2}dx$, $\int \sin(x)\cos(x)dx$, $\int \frac{1}{x\cdot\ln(x)}dx$,

$\int \frac{6x-5}{3x^2-5x+1}dx$, $\int tg(x)dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+2\right)}dx$, $\int \frac{arctg^2(x)}{1+x^2}dx$,

$\int \frac{e^x}{(1+2e^x)^2}dx$, $\int (6x+9)\sqrt{x^2+3x-1}dx$, $\int \sin(x)\sqrt{\cos(x)}dx$,

$\int \sin^2(x)\cos(x)dx$, $\int \sin^3(x)dx$, $\int \cos^5(x)dx$, $\int \frac{\sin^5(x)}{\cos^7(x)}dx$.

6. Használja az I. típusú helyettesítés *általános* alakját:

$\int x\exp(x^2)dx$, $\int \frac{\sin\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}dx$, $\int \frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)}dx$, $\int \frac{\cos(x)}{\sqrt{0.7-\sin(x)}}dx$,

$\int \frac{7x}{\sqrt{2+x^2}}dx$, $\int \frac{2}{x(3-\ln(x))}dx$, $\int \frac{\sin(1/x)}{1/x^2}dx$, $\int 5^{\cos(x)}\sin(x)dx$,

$\int \frac{e^x}{e^x+2}dx$, $\int \frac{x}{(1+x^2)^2}dx$, $\int \frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}dx$.

7.Használjon II. típusú helyettesítést:

$\int \frac{1}{1+e^x}dx$, $\int \frac{1}{ch(x)}dx$, $\int \sqrt{e^x-1}dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{x}+1}dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}dx$,

$\int \frac{x}{\sqrt{3x-2}}dx$, $\int \frac{1}{1+\sqrt{x-1}}dx$, $\int \sqrt{1-x^2}dx$, $\int \sqrt{4-x^2}dx$,

$\int \sqrt{1+x^2}dx$, $\int \sqrt{x^2-1}dx$, $\int \sqrt{x^2+2x+2}dx$.

Parciális törtek és racionális törtfüggvények

1. Bontsa fel az alábbi törteket egy *valódi* tört és egy polinom összegére (ahol kell, végezzen polinomosztást):

$\frac{x^4+3x-6}{x^2+x-2}$, $\frac{2x^3-7x}{x^4-3}$, $\frac{3x^3-2x^2+4}{x^2-8x+15}$, $\frac{x^5+1}{x^5-3x}$, $\frac{x^5+2x^2+3}{x+1}$, $\frac{3x^3-2x^2+4}{x^2-8x+15}$.

2. Írja fel az alábbi törtek racionális tört alakját, a konstansok kiszámítása nélkül:

$\frac{x^3-8x^2+12}{(x-1)^2(x^2+4x+9)}$, $\frac{x^4+5x^2+3}{(x+7)(x^2+5x+7)^2}$, $\frac{x^2+8x+2}{(x-1)^3(x^2+4x+9)^2(x+7)(x^2+5)}$.

3. Bontsa fel az alábbi törteket parciális törtekre:

$\frac{1}{k\cdot(k+1)}$, $\frac{x+6}{x^2+x-2}$, $\frac{3x+2}{(x^2+2x+5)(x+1)}$, $\frac{x^2-1}{x^3+2x^2}$, $\frac{x}{(1-2x)^2}$, $\frac{x}{(x-1)^3}$,

$\frac{x^3}{(x^2+1)^2}$, $\frac{x^2+5}{x^4-16}$, $\frac{1}{(1-x^2)(1-x^3)}$, $\frac{3x^3-2x^2+4}{x^2-8x+15}$

4. Számítsa ki az alábbi alaptípusokat:

$\int \frac{5}{3-2x}dx$ $\int \frac{8}{(1+2x)^3}dx$ $\int \frac{-7}{(1-2x)^2}dx$ $\int \frac{4}{1+x^2}dx$ $\int \frac{3}{4+x^2}dx$ $\int \frac{5}{x^2+2x+2}dx$

$\int \frac{-6}{x^2+4x+7}dx$ $\int \frac{8}{x^2+7x+13}dx$ $\int \frac{-9}{2x^2+5x+7}dx$ $\int \frac{4x+2}{1+x^2}dx$ $\int \frac{3x+4}{2x^2+5x+7}dx$.

5. Parciális törtekre bontás után számítsa ki az alábbi határozatlan integrálokat:

$\int \frac{1}{x\cdot(x+1)}dx$, $\int \frac{x+6}{x^2+x-2}dx$, $\int \frac{3x+2}{(x^2+2x+5)(x+1)}dx$, $\int \frac{x^2-1}{x^3+2x^2}dx$,

$\int \frac{x}{(1-2x)^2}dx$, $\int \frac{x}{(x-1)^3}dx$, $\int \frac{x^3}{(x^2+1)^2}dx$, $\int \frac{x^2+5}{x^4-16}dx$, $\int \frac{1}{(1-x^2)(1-x^3)}dx$.

Határozott (Riemann-féle) integrál és alkalmazásai

1. Számítsuk ki az alábbi határozott integrálokat a definíció alapján (integrálközelítő összegek segítségével):

$\int_0^1 x\,dx$, $\int_0^1 x^2\,dx$.

2. Számítsuk ki az alábbi integrálokat a Newton-Leibniz szabály segítségével:

$\int\limits_0^{2\pi} \sin$, $\int\limits_1^2 \frac{1}{x^3+x}dx$, $\int\limits_{-2}^1 |x|\,dx$, $\int\limits_{-2}^3 |x^3-x|\,dx$, $\int\limits_{-5}^5 |x^2+2x-3|\,dx$.

3. Keressük meg az alábbi függvények integrálfüggvényét a megadott intervallumon:

$f(x) = 10 - x \ , \quad -1 \le x \le 12, \qquad g(x) = x^2 + x \ , \quad -2 \le x \le 1 \ ,$

$$f(x) = \begin{cases} 3t & \text{ha} \quad -3 \le x \le 2 \\ -1 & \text{ha} \quad 2 < x \le 5 \end{cases} \ , \qquad -3 \le x \le 5 \ ,$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{ha} \quad x \ge 0 \end{cases} \ , \qquad x \in \mathbb{R} \ , \quad \lambda \in \mathbb{R}^+ \text{ adott,}$$

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{ha} \quad x \in [0,1] \\ (x-1)^2 & \text{ha} \quad x \in (1,2] \\ 2 & \text{ha} \quad x > 2 \end{cases} \ , \qquad x \in \mathbb{R}^+ \ ,$$

$f(x) = |\cos(x)| \ , \quad 0 \le x \ .$

4. Számítsa ki az alábbi függvénygörbék "alatti" területet:

$y = \sqrt{x} \ , \quad 0 \le x \le 3 \ , \qquad y = \sin(x) \ , \quad -\pi/2 \le x \le \pi/2 \ ,$

$y = \sqrt{r^2 - x^2} \ , \quad -r \le x \le r \ , \qquad y = \frac{1}{1+x^2} \ , \quad -3 \le x \le 3 \ ,$

5. Számítsa ki az alábbi függvénygörbék és az x tengely *közötti* területet:

$y = x^2 - 2x - 3 \ , \quad y = x^4 - x^2 \ , \quad y = \sin^2(x) \ .$

6. Számítsa ki az alábbi függvénygörbék és a *két* koordinátatengely *közötti* területet:

$y = 5 - 2x \ , \quad y = 3 + \frac{1}{x-2} \ , \quad y = \frac{4-4x}{(x+1)^2} \ .$

7. Számítsa ki az alábbi $y = f(x)$ és $y = g(x)$ függvénygörbék *közötti* területet:

$f(x) = x^2$ és $g(x) = 3x + 4, \quad f(x) = x^2 + 2x - 4$ és $g(x) = -x^2/2 + 2x + 2,$

$f(x) = \frac{4}{3x}$ és $g(x) = 5 - x \ , \quad f(x) = \sqrt{x}$ és $g(x) = x/3 + 1/2 \ ,$

$f(x) = \sqrt{x+4}$ és $g(x) = \sqrt{5-x} \ .$

8. Számítsa ki az alábbi görbedarabok ívhosszait:

$y = ch(x) \ , -2 \le x \le 2 \ , \quad y = \sqrt{x^3} \ , 1 \le x \le 2 \ ,$

$y = x^2 \ , 2 \le x \le 3 \ , \quad y = \sqrt{R^2 - x^2} \ , \quad -R \le x \le R \ ,$

$y = e^x \ , -1 \le x \le 2 \ , \quad y = \ln(x) \ , \quad 1 \le x \le 2 \ .$

9. Számítsuk ki az alábbi függvénygörbék x **tengely** körüli forgatásakor kapott testek térfogatát:

$y = \sin(x) \ , 0 \le x \le \pi \ , \quad y = cx + d \ , 0 \le x \le m \ ,$

$y=\sqrt{r^2-x^2}$, $-r \le x \le r$, $\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$.

x^2, $\sqrt{x}$, $\frac{1}{\sqrt{x}}$, $\frac{1}{x}$, $sh(x)$, $ch(x)$, $a \le x \le b$,

$ln(x)$, $x \cdot sh(x)$, $x \cdot \ln(x)$, $tg(x)$, $a \le x \le b$.

10. Számítsa ki az alábbi függvénygörbék x tengely körüli megforgatásával kapott felületek felszínét:

csonkakúp: $y=c\cdot x$, $K \le x \le K+M$ ahol $0 \le K$,

az r és R sugarú körökkel határolt, M magasságú csonkakúp,

katenoid: $y=ch(x)$, $2 \le x \le 3$,

parabolatükör: $y=c\sqrt{x}$, $a \le x \le b$,

$\frac{1}{3}x^3$, $a \le x \le b$.

Improprius integrálok

Számítsuk ki az alábbi improprius integrálokat (vizsgáljuk meg előtte az integrandus értelmezési tartományát!):

$\int_0^\infty \frac{dx}{2+x^2}$, $\int_3^\infty \frac{dx}{(x-1)(x-2)}$, $\int_1^\infty \frac{x+1}{x^2+1}dx$, $\int_\pi^\infty \sin$, $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x}dx$, $\int_{-\infty}^0 5^x\,dx$,

$\int_0^\infty xe^{-x}dx$, $\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)}dx$, $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{4x^2+4x+2}$, $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{ch}$, $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx$,

$\int_0^1 \ln$, $\int_1^e \frac{1}{x\cdot\ln(x)}dx$, $\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x}dx$, $\int_{-2}^3 \frac{dx}{x^2}$, $\int_{-2}^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$, $\int_{-2}^3 \frac{dx}{x^2+4x+3}$.

Sorok

0. Az alábbi soroknál ellenőrizzük a konvergencia "$a_n \to 0$" szükséges feltételét, és ez alapján mondjunk véleményt a sor *lehetséges* konvergenciájáról:

$\sum\limits_{n=1}^\infty (-1)^n$, $\sum\limits_{n=1}^\infty 2^n$, $\sum\limits_{n=1}^\infty \sqrt[n]{2}$, $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{n^2+1}{5n^2-1}$, $\sum\limits_{n=0}^\infty (-1)^n \sqrt[n]{0.1}$,

$\sum\limits_{n=0}^\infty (-1)^n\cdot 0.1^{n+1}$, $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{1}{n}$, $\sum\limits_{n=2}^\infty \frac{1}{\ln(n)}$, $\sum\limits_{n=2}^\infty \frac{1}{n\cdot\ln(n)}$.

1. Írjuk fel az alábbi sorok M -edik részletösszegét, és ez alapján vizsgáljuk meg a sor konvergenciáját, adjuk meg összegét:

$\sum\limits_{n=0}^\infty 1^n$, $\sum\limits_{n=0}^\infty (-1)^n$, $\sum\limits_{n=0}^\infty 2^n$, $\sum\limits_{n=0}^\infty 2^{-3n}$, $\sum\limits_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{4^{n+3}}{5^n}$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{6^n}\ , \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3^{2n+1}} + \frac{4}{5^{2n+1}}\right)\ , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}\right)\ ,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)\ , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)}\ , \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}\ , \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$$

2. Melyek konvergensek az alábbi sorok közül?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}\ , \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{5n^2+2}\ , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}\ , \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n)}\ , \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3}{n\cdot\ln(n^2)}\ ,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+\sqrt{n}}\ , \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2-10}\ , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\sqrt{n}\right)^{\sqrt{n}}}\ , \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}\ , \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{3^n+5^n}\ ,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n-2^n}\ , \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{3^n-5}}{2^n}\ , \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{10}}{10^n}\ , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+\sqrt{n}}{n}\right)^{2n}\ , \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{10^{10n}}{n!}\ ,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\ , \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n!}}\ , \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n+6}{3n-2}\right)^{8n-6}\ , \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}\ , \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!}\ ,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3n-1}\ , \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2-4n+5}\ , \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1+n^2}{1+n^3}\right)^2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}\ , \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n}\ ,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}\ , \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n\ , \quad \sum_{n=1}^{\infty} arcsin^n\left(\frac{1}{n}\right)\ , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)\ , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^n(n+1)}\ ,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5n+3}{4n^2+1}\ , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8n^2+1}{(n^2+1)n}\ , \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{3^n}\ , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n^2}{4^n}\ , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}\ ,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot\sqrt[n]{n}}\ , \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}\ , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}\ , \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3n+13}{4n+14}\right)^n\ , \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin^2(n)}{n^2+1}\ ,$$

3. Adjuk meg az alábbi összegeket kettő tizedesjegy pontossággal:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}\ , \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+3}{n^2+2n}\ , \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-11}\ , \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\ , \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{10^n}\ .$$

4. Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi sorok konvergensek-e, abszolút- ill. feltételesen konvergensek-e:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}\ , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3}\ , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\ , \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{1+n^2}\ , \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n)}\ .$$

5. A megadott paraméterek mely értékeire konvergensek az alábbi sorok:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n\ , \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2x+1}{3x}\right)^n\ , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x+2}{x}\right)^n\ , \quad \sum_{n=0}^{\infty} (\sin(\alpha))^n\ , \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{(x+1)^n}\ ,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n^3-5n^2+33}\ , \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-3)^n}{n^3}\ , \quad \sum_{n=0}^{\infty} tg^n(x)\ , \quad \sum_{n=0}^{\infty} n\cdot x^n\ , \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}\ ,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{1}{n^s}\ , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n} \cdot x^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} n! \cdot x^n.$$

Analízis II.

n-dimenziós euklideszi-tér ($\mathbb{R}^n$)

ld.:

D:\Apu\SkMuvek\VeOktat-Mat+zh-354Mb\Analizis\Feladat-sorok\Ajanlott2felev(GrJ)\

feladat2.jpg , feladat3.jpg ,

Többváltozós függvény határértéke, folytonossága

1. Mely pontokban folytonosak az alábbi $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvények?

$$\cos(3x - y^2) \; , \quad sgn\,(x+y) \; , \quad (x+y) \cdot sgn\,(x+y) \; .$$

2. Folytonosak-e az origóban az alábbi $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvények?

$$f_1(x,y) = \begin{cases} \frac{y^2}{x^2+y^2} & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad f_1(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f_3(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{ha } x^2+y^2 > 0 \\ 0 & \text{ha } x^2+y^2 = 0 \end{cases} \qquad f_4(x,y) = \begin{cases} \frac{x \cdot |y|}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{ha } x^2+y^2 > 0 \\ 0 & \text{ha } x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

3. Számítsuk ki az alábbi határértékeket:

$$\lim_{(x,y)\to(\pi,0)} \cos(y) \cdot \sin\left(\frac{x}{2}\right) \; , \quad \lim_{(1,1)} \frac{x^2-y^2}{x-y} \; , \quad \lim_{(1,1)} \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} \; , \quad \lim_{(0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \; ,$$

$$\lim_{(0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \; , \quad \lim_{(0,0)} \frac{1}{xy} \; , \quad \lim_{(0,0)} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}\right) \; .$$

Többváltozós függvények differenciálhatósága

Parciális differenciálhányadosok

1. Határozza meg az alábbi parciális differenciálhányadosokat (deriváltakat) és adja meg értelmezési tartományukat is:

$\frac{\partial}{\partial x}x^3y^4$, $\frac{\partial}{\partial y}x^3y^4$, $\frac{\partial}{\partial s}x^3y^4$, $\frac{\partial}{\partial x}x \cdot \ln(y)$, $\frac{\partial}{\partial y}x \cdot \ln(y)$, $\frac{\partial}{\partial s}x \cdot \ln(y)$,

$\frac{\partial}{\partial x}x^y$, $\frac{\partial}{\partial y}x^y$, $\frac{\partial}{\partial s}x^y$.

2. Határozza meg az alábbi függvények összes változó szerinti parciális differenciálhányados függvényeit és adja meg azok értelmezési tartományait:

$f(x,y,z) = x^2 + x \cdot y^2 + 3z^3$,

$g(x,y) = (3xy^2 + x^3y)\sqrt{2y - \sin(x)} + 5y \cdot e^{3x-4}$,

$h(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $k(x,y) = \frac{xy^2}{\sqrt{x^2+3y^3}}$.

3. Adjuk meg a parciális deriváltak értékét az adott helyeken!

a) $f(x,y) := 2x^2 + y - \frac{\sqrt{x}}{y} + \pi \quad (x \geq 0,\ y \neq 0)$,

$\frac{\partial}{\partial x}f(1,2)$, $\frac{\partial}{\partial y}f(1,2)$, $\frac{\partial}{\partial x}f(0,-4)$, $\frac{\partial}{\partial y}f(0,-4)$,

b) $f(x,y,z) = ze^{-\frac{x}{y}} \quad (x,z \in \mathbb{R},\ y \neq 0)$,

$\frac{\partial}{\partial x}f(0,1,2)$, $\frac{\partial}{\partial y}f(1,2,0)$, $\frac{\partial}{\partial z}f(1,1,0)$,

c) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{ha } x^2+y^2 > 0 \\ 0 & \text{ha } x^2+y^2 = 0 \end{cases}$, $\frac{\partial}{\partial x}f(0,0)$, $\frac{\partial}{\partial y}f(0,1)$, $\frac{\partial}{\partial x}f(1,2)$.

4. Adja meg a 2. feladatban szereplő függvények (összes változó szerinti) legfeljebb harmadrendű parciális differenciálhányados függvényeit!

5. Adjuk meg az alábbi parciális derivált függvényeket:

a) $f(x,y) = \sqrt{2xy + y^2}$ $\quad \frac{\partial^2}{\partial x^2}f$, $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}f$, $\frac{\partial^2}{\partial y^2}f$,

b) $f(x,y,z) = 2x^2y - 3y^2z + xyz$ $\quad \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}f$, $\frac{\partial^2}{\partial x^2}f$, $\frac{\partial^3}{\partial x \partial y \partial z}f$, $\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y}f$,

c) $f(x,y) = x^y$ $\quad \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}f$, $\frac{\partial^2}{\partial y \partial x}f$, $\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y}f$, $\frac{\partial^3}{\partial x \partial y \partial x}f$.

6. Számítsuk ki a következő parciális deriváltak értékét a megadott helyen:

a) $f(x,y) = \frac{1+x}{1+y}$ $\quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(0,0)$, $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(1,1)$, $\frac{\partial^2}{\partial y^2} f(2,2)$,

b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2} & x^2+y^2 > 0 \\ 0 & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$ $\quad \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(0,0)$, $\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(0,0)$.

7. Igazolja: ha $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$ akkor $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.

Teljes (totális) differenciálhányados (gradiens)

1. Vizsgálja meg, hogy az alábbi függvényeknek létezik-e az adott pontban gradiensvektora, majd számítsa is ki a gradiensvektort!

$f_1(x,y) = x^2 - xy + y^2$, $\quad P_1(1,2)$, $P_2(0,0)$, $P_3(0,1)$,

$f_2(x,y) = x^3 + y^2 - 3xy$, $\quad P_1(1,2)$, $P_2(0,0)$, $P_3(0,1)$,

$f_3(x,y) = y \cdot \sin^2 x + x \cdot \cos^2 y$, $\quad P_1(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3})$, $P_2(0,0)$, $P_3(0,\pi)$,

$f_4(x,y) = \ln\left(1 + \frac{y}{x}\right)$, $\quad P_1(1,2)$, $P_2(3,0)$, $P_3(3,1)$,

$f_5(x,y) = (3xy^2 + x^3y)\sqrt{2y - \sin(x)} + y \cdot e^{3x-4}$, $\quad P(2, 5^{rad})$,

$f_6(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$, $\quad P_1(1,2,3)$, $P_2(0,0,0)$, $P_3(0,1,2)$,

$f_7(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\quad P_1(1,2,3)$, $P_2(0,0,0)$, $P_3(0,1,2)$,

$f_8(x,y,z) = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $\quad P(3,4,5)$.

A differenciálhányadosok alkalmazásai

Iránymenti differenciálhányados

1. Adja meg az f függvény iránymenti deriváltját az a pontban a $\underline{v}$ *vektor* illetve α *szög* irányában! (Ellenőrizze, hogy $\underline{v}$ egységre normált-e, amennyiben nem, úgy normálja!)

$f_1(x,y) = e^{x^2+y^2}$, $\quad a = (-1,2)$, $\quad \underline{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$,

$f_2(x,y,z) = z\sin(x+y)$ $\quad a = (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}, 1)$ $\quad \underline{v} = (3,1,4)$,

$f_3(x,y) = \ln(x+y)$ $\quad a = (1,1)$, $\quad \alpha = 30°$,

$f_4(x,y) = \begin{cases} \frac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} & x^2+y^2 > 0 \\ 0 & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$, $\quad a = (0,0)$, $\quad v = \left(1, \sqrt{3}\right)$.

2. Adjuk meg az $f(x,y) = x^2 - 2x^2y + xy^2 + 1$ függvény $P(1,2)$ pontbeli, $Q(4,6)$ pont irányába vett iránymenti deriváltját!

3. Milyen irányban változik "legjobban" az $f(x,y) = x^2 + 4y^2$ függvény a $P(2,1)$ pontban?

Szélsőértékszámítás

1. Hol lehet szélsőértéke az alábbi függvényeknek?

$f(x,y,z) = x^2 + 2xy - 2x + 2y^2 - 2y + z^2 + 1$,

$g(x,y) = e^{x^2-y^2}$, $\quad h(x,y) = \sin x + \cos y + x - y$.

2. Határozza meg az alábbi függvények helyi (lokális) szélsőérték helyeit és azok értékeit:

$f(x,y) = x^3 + y^2 + 3xy$, $\quad g(x,y) = \frac{1}{3}x^3 + y^2 + 2xy - 3x$,

$h(x,y) = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$, $\quad j(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$,

$k(x,y) = xy\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ $\quad (x^2 + y^2 \le 1)$,

$\ell(x,y) = xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$, $\quad m(x,y) = \frac{1-x+y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$.

Érintősík

Adja meg a "*gradiensvektor*" alfejezetben található (kétváltozós) függvények érintősíkjainak egyenletét a megadott pontokban.

Egyenletmegoldás, közelítő számítások

###

Összetett függvény deriválása (többváltozós láncszabály)

1. Adja meg az alábbi összetett függvények teljes deriváltjá (gradiensvektorát):

$f_1(x,y,z) = x \cdot y \cdot z$ ahol $x(u,v) = u+v$, $y(u,v) = u-v$, $z(u,v) = \sin u$,

$f_2(x,y) = \frac{x}{y}$ ahol $x(t) = \ln t$, $y(t) = e^t$,

$f_3(x,y) = e^{x^2+y^2}$ ahol $x(r,\phi) = r\cos\phi$, $y(r,\phi) = r\sin\phi$.

2. Adjuk meg az $f\left(x(u,v), y(u,v)\right)$ összetett függvény gradiensét az a pontban, ha

a) $f(x,y) = x^2 + xy$, $a = (1,2)$, $x(1,2) = 3$, $y(1,2) = 4$,

$\operatorname{grad} x(1,2) = (-1,0)$ $\operatorname{grad} y(1,2) = (\sqrt{2}, 10)$,

b) $a = (-1, \sqrt{2})$, $\frac{\partial}{\partial x} f(-1,1) = 3$, $\frac{\partial}{\partial y} f(-1,1) = 2$,

$x(u,v) = u^2 - v^2$, $y(u,v) = -\frac{uv}{\sqrt{2}}$.

Kettős integrál

Definíció

###

Integrálás normáltartományon

1.) Számítsuk ki az alábbi *szukcesszív* (ismételt) integrálokat:

a) $\int\limits_3^7 \left(\int\limits_4^5 x^2 + y^3 \, dx \right) dy$, $\int\limits_1^2 \left(\int\limits_8^9 x^5 y^3 \, dy \right) dx$,

b) $\int\limits_H \int f$ ahol $f(x,y) = \frac{x}{y}$ és H az $A(2,3)$, $B(2,5)$, $C(6,5)$, $D(6,3)$ pontok által határolt téglalap.

c) $\int\limits_{[1,2]\times} \int\limits_{[0,3]} (2x^2 + 3xy + 4y^2) \, dxdy$.

2.) Számítsa ki az alábbi $\int\limits_a^b \int\limits_{u(x)}^{v(x)} f(x,y)\,dydx$ integrálokat, ahol

a) $u(x) = x^2 - 2x - 4$, $v(x) = 3x^2 + 8x$, $f(x,y) = 3x^2 + 8y^2 - xy$, $a = -6$, $b = 8$,

b) $u(x) = x^2 + x - 4$, $v(x) = 3\sqrt{x} + 8x$, $f(x,y) = x^2 + xy$, $a = 3$, $b = 9$.

3.) Számítsa ki az alábbi $\int\int\limits_H f$ integrálokat, ahol a H tartományt alulról és felülről a g és h függvénygörbék határolják:

a) $f(x,y) = x + y$, $g(x) = x^2 + 2x$, $h(x) = 4 - x^2$,

b) $f(x,y) = 2y$, $g(x) = x^2$, $h(x) = x + 2$,

c) $f(x,y) = y\cos(x)$, $g(x) = \sin(x)$, $h(x) = 2\sin(x)$, $0 \le x \le \pi$.

4.) Számítsa ki az alábbi $\int\int\limits_H f$ integrálokat. Minden esetben rajzolja fel a H tartományt is. Ahol lehet, számítsa ki az integrált mind függőlegesen, mind vízszintesen is.

a) $f(x,y) = x^2 + y + 1$, H -t az x -tengely, y -tengely és az $x + 2y = 1$ egyenes határolják,

b) $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2}$ és $H = \{(x,y) : x \le y \le 1,\ 0 \le x \le 1\}$,

c) $f(x,y) = xy$ és H a koordinátatengelyek és az $y = 1 - x$ egyenes által bezárt korlátos halmaz,

d) $f(x,y) = x^2 + y^3$, $H = ABC\triangle =$ az $A(3,2)$, $B(5,8)$ és $C(9,4)$ pontok által meghatározott háromszög.

e) $f(x,y) = yx$ és $H =$ az $(1,0)$ közepű egységsugarú kör x tengely feletti fele,

f$_1$) $f(x,y) = y$ és $H =$ origó közepű egységsugarú kör I. síknegyedbe eső negyede,

f$_2$) $f(x,y) = 1 + 2xy$ és H az $y = \sqrt{x}$, $y = 2x - 1$ és $x = 0$ görbék által határolt korlátos halmaz.

f$_3$) $f(x,y) = xe^y$ és H -t az $x = 0$, $y = 0$, $y = 2$ és $y = 4 - 2x$ egyenesek határolják,

5.) Adja meg a H tartományt az alábbi feladatokban:

a) $\int\limits_{1}^{3}\int\limits_{1}^{4x-x^2} f(x,y)\ dydx$, **b)** $\int\limits_{-\sqrt{3}/2}^{\sqrt{3}/2}\int\limits_{1/2}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\, dxdy$,

c) $\int\limits_{0}^{2}\int\limits_{y}^{1+\sqrt{1-y}} f(x,y)\, dxdy$,

6.) Cserélje fel az integrálás sorrendjét (azaz vízszintes és függőleges irányát) az alábbi feladatokban:

a) $\int\limits_{0}^{1.5}\int\limits_{0}^{3-y/2} f(x,y)\, dxdy,$ $\int\limits_{0}^{1}\int\limits_{y}^{1} f(x,y)\, dxdy$, $\int\limits_{1}^{3}\int\limits_{1}^{4x-x^2} f(x,y)\, dydx,$

$\int\limits_{0}^{1}\int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)\, dxdy$, $\int\limits_{-\sqrt{3}/2}^{\sqrt{3}/2}\int\limits_{y}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\, dxdy$,

b) az 5) feladatban szereplő integrálokban.

7.) Számítsa ki az alábbi $\int\limits_{H}\int f$ integrált:

a) $f(x,y) = e^{x^2}$, H -t az x -tengely, az $y = x$ és az $x = 1$ egyenesek határolják.

Integráltranszformációk

1) Számítsuk ki az alábbi $\int\limits_{H}\int f$ integrálokat polártranszformáció segítségével, ahol:

a) $f(x,y) = y$ és $H =$ origó közepű egységsugarú kör I. síknegyedbe eső negyede,

b) $f(x,y) = yx$ és $H =$ az $(1,0)$ közepű egységsugarú kör x tengely feletti fele,

c$_1$) $f(x,y) = \sqrt[3]{x^2+y^2}$ és $H = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 1,\ y > -x\}$,

c$_2$) $f(x,y) = \ln(1+x^2+y^2)$ és $H = \{(x,y) : 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\}$,

c$_3$) $f(x,y) = x^3 - 2xy$ és $H = \left\{(x,y) : 1 \leq x^2+y^2 \leq 4,\ \frac{\sqrt{3}}{3}x \leq y \leq \sqrt{3}x\right\}$,

d) $f(x,y) = 3x+y$ és $H = \left\{(x,y) : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1\right\}$,

2.) Számítsuk ki az alábbi $\int\limits_{H}\int f$ integrálokat *lineáris* transzformáció segítségével, ahol:

a) $f(x,y) = x^2 - y^2$ és $H =$ az $A(0,0)$, $B(3,1)$, $C(5,4)$, $D(2,3)$ pontok által meghatározott paralelogramma,

b) $f(x,y) = xy$ és $H =$ az $A(0,0)$, $B(1,2)$, $C(1,3)$, $D(2,1)$ pontok által meghatározott paralelogramma,

c) $f(x,y) = x + y$ és $H =$ az $A(-2,0)$, $B(0,3)$, $C(2,0)$, $D(0,-3)$ pontok által meghatározott paralelogramma,

3.*) Számítsuk ki az alábbi $\int\int_H f$ integrálokat egyéb transzformáció segítségével, ahol:

a) $f(x,y) = y/x$, $H =$ az $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{4}{x}$, $y = x$ és $y = 2x$ görbék által meghatározott korlátos síkrész,

b) $f(x,y) = 1$, $H =$ az $y = x^2/2$, $y = 2x^2$, $y = \frac{1}{x}$ és $y = \frac{4}{x}$ görbék által meghatározott korlátos síkrész.

Közönséges differenciálegyenletek

Alapfogalmak

... Értelmezési tartományt is !!!

Szétválasztható változójú (szeparálható) differenciálegyenletek

Oldja meg az alábbi differenciálegyenleteket! Adja meg a megoldás értelmezési tartományát is!

a) $y'(x) = \frac{x^3}{y^2(x)}$, $y(0) = 1$,

b) $y'(x) = \frac{5x^4}{4y^3(x)}$, $y(0) = 1$,

c) $y'(x) = \frac{y^2(x)}{x}$, $y(1) = 1$,

d) $y'(x) = 4 \cdot \sqrt[5]{y(x)}$, $y(1) = 3$,

Elsőrendű lineáris differenciálegyenletek

Oldja meg az alábbi differenciálegyenleteket! Adja meg a megoldás értelmezési tartományát is!

a) $y'(x) + 2y(x) = e^{3x}$, $y(0) = 0$,

b) $y'(x) + 2x \cdot y(x) = 2x$, $y(0) = 0$,

Másodrendű lineáris differenciálegyenletek

Oldja meg az alábbi differenciálegyenleteket! Adja meg a megoldás értelmezési tartományát is!

a) $y''(x) - 6y'(x) + 25y(x) = 0$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$,

b) $y''(x) + y(x) = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$,

c) $y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$,

d) $y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = e^{4x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$,

e*) $y''(x) - 2y'(x) + 1 = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$,

f) $y''(x) + 2y'(x) + y(x) = 1$, $y(1) = -1$, $y'(1) = 1$,

Laplace- transzformáció és alkalmazásai

1. Számítsa ki az alábbi Laplace- transzformáltakat:

$\mathcal{L}\left(3 - 4e^{(5+6i)t}\right)$, $\mathcal{L}\left(e^{5t}\cos(2t)\right)$, $\mathcal{L}\left(t^3 e^{5t}\right)$, $\mathcal{L}\left(\cos^2(t)\right)$, $\mathcal{L}\left(\sin^3(t)\right)$,
$\mathcal{L}\left(t^2\cos^2(t)\right)$, $\mathcal{L}\left(t^2 e^{6t}\sin(4t)\right)$, $\mathcal{L}\left(sh(5t)\right)$, $\mathcal{L}\left(t^4 ch(3t)\right)$.

2. Számítsa ki az alábbi f függvények Laplace- transzformáltját:

$$f_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{ha } t < 2 \\ 1 & \text{ha } t \geq 2 \end{cases} \qquad f_2(t) = \begin{cases} 1 & \text{ha } t < 2 \\ 0 & \text{ha } t \geq 2 \end{cases}$$

$$f_3(t) = \begin{cases} 0 & \text{ha } t < 2 \\ 1 & \text{ha } 2 \leq t \leq 3 \\ 0 & \text{ha } 3 < t \end{cases} \qquad f_4(t) = \begin{cases} 0 & \text{ha } t < 2\pi \\ \sin(t) & \text{ha } 2\pi \leq t \leq 4\pi \\ 0 & \text{ha } 4\pi < t \end{cases}$$

$$f_5(t) = \begin{cases} 0 & \text{ha } \ t < 1 \\ t-1 & \text{ha } 1 \leq t \leq 2 \\ 1 & \text{ha } \ 2 < t \end{cases} \quad .$$

3. Számítsa ki az alábbi $F(s)$ függvények *inverz* Laplace- transzformáltjait:

$\frac{1}{5s-3}$, $\frac{1}{s^2-4}$, $\frac{1}{s^2+4}$, $\frac{5s+3}{s^2+4}$, $\frac{s+10}{s^2+4s+3}$, $\frac{2s+3i}{s^2+3is-2}$, $\frac{1}{(s+3)^5}$, $\frac{1}{(2s-1)^3}$,

$\frac{s+1}{(s+3)^5}$, $\frac{4s+2}{s^2+6s+13}$, $\frac{1}{s^3+6s^2+13s}$, $\frac{s^2}{(s-3)^5}$, $\frac{3s+6}{(s^2+4)^2}$, $\frac{5s+3}{(s^2-1)^2}$, $\frac{s^2-3}{(s^2+4)^2}$,

$\frac{s^3}{(s^2+9)^2}$.

4. Oldjuk meg a következő integro-differenciálegyenleteket Laplace transz formáció segítségével:

a) $y'(t) + 3y(t) = e^t + \cos(2t)$, $\quad y(0) = 1$,

b) $y''(t) - 2y'(t) - 3y(t) = e^{3t} + 2e^t$, $\quad y(0) = 0$, $\quad y'(0) = 0$,

c) $y^{(4)} - 13y'' + 36y = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0, y''(0) = 3, y'''(0) = 2,$

d) $f'(t) + 2f(t) + \int\limits_0^t f(x)\, dx = \sin(t)$, $\quad f(0) = 1$,

e) $f(t) = \cos(t) + \int\limits_0^t e^{t-x} f(x)\, dx$,

f) $f'(t) = \sin(t) + \int\limits_0^t f(x)\cos(t-x)\, dx$, $\quad f(0) = 0$.

5. Oldjuk meg a következő integro-differenciálegyenlet *rendszereket* Laplace transzformáció segítségével:

a) $\begin{cases} x'(t) = x(t) + 3y(t) & x(0) = 4 \\ y'(t) = x(t) - y(t) & y(0) = -2 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x' = -3x + y & x(0) = 1 \\ y' = 2x - 2y + \cos(t) & y(0) = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x' = \frac{-3}{2}x + 2y & x(0) = 1 \\ y' = \frac{-3}{2}y + 2z & y(0) = 0 \\ z' = 2x - \frac{3}{2}z & z(0) = 0 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} f(t) = e^t + \int\limits_0^t f(x)\, dx - \int\limits_0^t g(x) \cdot e^{t-x}\, dx \\ g(t) = -t - \int\limits_0^t (t-x) \cdot f(x)\, dx + \int\limits_0^t g(x)\, dx \end{cases}$

Lineáris Algebra

eof