1991

LINEÁRIS ALGEBRA

(előadásvázlat)

VESZPRÉMI EGYETEM
University of Veszprém, Hungary
H-8201 Veszprém, P.O.B. 158, Egyetem u. 10, Phone: +36-88-422-022

Dr. Szalkai István
egyetemi adjunktus
Matematikai és Számítástechnikai Tanszék

LINEÁRIS ALGEBRA

Az $\mathbb{R}^n$ - vektortér

DEFINÍCIÓ. (i) $\mathbb{I}_n := \{1,2,\dots,n\}$ ha $n \in \mathbb{N}$ tetszőleges.

(ii) Rendezett (valós számokból álló) n -es : egy $f\colon \mathbb{I}_n \to \mathbb{R}$ függvény. Ezt általában $(x_1,\dots,x_n)$ -el jelöljük, ha $f(1) = x_1$, $f(2) = x_2$, $\dots$, $f(n) = x_n$. Lineáris algebrában inkább az

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

jelölést használjuk. Ekkor az $x_1,\dots,x_n$ számokat a rendezett n -es komponenseinek hívjuk.

(iii) $\mathbb{R}^n$:= valós számokból álló rendezett n -esek halmaza
$\mathbb{C}^n$:= komplex számokból álló rendezett n -esek halmaza □

NB: n=2 (n=3) esetben $\mathbb{R}^n$ -et azonosíthatjuk a síkbeli (térbeli) geometriai vektorok halmazával.

A továbbiakban legyen n tetszőleges rögzített természetes szám, $n \ge 1$. A következő állítások, tételek, definíciók mind igazak maradnak, ha $\mathbb{R}^n$ helyett mindenhol $\mathbb{C}^n$ -et írunk.

ÁLLÍTÁS. Tetszőleges $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$ esetén $\underline{x}=\underline{y}$ pontosan akkor teljesül, ha $\underline{x}$ és $\underline{y}$ összes komponense páronként megegyezik. □

DEFINÍCIÓ: Tetszőleges $\underline{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$, $\underline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén legyen

$$\underline{a} + \underline{b} := \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \lambda\underline{a} := \begin{bmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \vdots \\ \lambda a_n \end{bmatrix} .$$ □

Ha már $\mathbb{R}^n$ (és $\mathbb{C}^n$) elemei között definiáltuk az összeadást és a skalárral való szorzást, akkor nyugodtan hívhatjuk $\mathbb{R}^n$ (és $\mathbb{C}^n$) -et vektortereknek, továbbá elemeiket <u>vektoroknak</u> hívjuk, és aláhúzott latin kisbetűkkel jelöljük: $\underline{x}$, $\underline{y}$, $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{u}$, $\underline{v}$, ... stb.

<u>**TÉTEL**</u> (<u>Alaptétel</u>). Tetszőleges $\underline{a},\underline{b},\underline{c} \in \mathbb{R}^n$, $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$ esetén

(I) $\underline{a} + \underline{b} = \underline{b} + \underline{a}$ (az összeadás kommutatív)

(II) $(\underline{a}+\underline{b}) + \underline{c} = \underline{a} + (\underline{b}+\underline{c})$ (az összeadás asszociatív)

(III) van $\mathbb{R}^n$-nek pontosan egy olyan $\underline{o}$ ún. <u>nulleleme</u> hogy minden $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$ vektorra $\underline{a} + \underline{o} = \underline{a}$

(IV) tetszőleges $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$ vektorhoz van olyan $\underline{a}' \in \mathbb{R}^n$ vektor, amelyre $\underline{a} + \underline{a}' = \underline{o}$
($\underline{a}'$ -t $\underline{a}$ <u>inverzének</u> vagy inkább <u>ellentett vektorának</u> nevezzük.)

(V) $\lambda(\underline{a}+\underline{b}) = \lambda\underline{a} + \lambda\underline{b}$
(disztributivitási tulajdonságok)
(VI) $(\lambda+\mu)\underline{a} = \lambda\underline{a} + \mu\underline{a}$

(VII) $(\lambda\mu)\underline{a} = \lambda(\mu\underline{a})$

(VIII) $1\cdot\underline{a} = \underline{a}$ □

<u>NB</u>: A precizség kedvéért meg kell jegyeznünk, hogy (IV) csak akkor teljes, ha $\underline{o}$ egyértelmű, ezt azonban az alábbi Állítás (2) pontja biztosítja.

<u>**ÁLLÍTÁS**</u>. Tetszőleges $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$, $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$ esetén
(1) $o\cdot\underline{a} = \underline{o}$ (itt $o \in \mathbb{R}$, $\underline{o} \in \mathbb{R}^n$)
(2) $\underline{o}$ egyértelmű

(3) $\underline{a}' = (-1) \cdot \underline{a}$

(4) $\underline{a}'$ egyértelmű

(5) $\lambda \cdot \underline{o} = \underline{o}$

(6) $\lambda \underline{a} = \underline{o} \Leftrightarrow \lambda = 0$ vagy $\underline{a} = \underline{o}$

(7) $\lambda \underline{a} = \mu \underline{a} \Leftrightarrow \lambda = \mu$ vagy $\underline{a} = \underline{o}$ □

DEFINÍCIÓ. $V \subseteq \mathbb{R}^n$ altér, ha

(i) V zárt az összeadásra és a skalárral való szorzásra nézve (azaz tetszőleges $\underline{u}, \underline{v} \in V$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén $\underline{u} + \underline{v} \in V$ és $\lambda \underline{u} \in V$), és

(ii) V-ben teljesülnek az Alaptételben felsorolt (I)-(VIII) tulajdonságok.

□

ÁLLÍTÁS. (i) -ből (ii) következik. □

PÉLDÁK:

Nevezetes alterek $\mathbb{R}^n$-ben: $V = \mathbb{R}^n$, $V = \{\underline{o}\}$,

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} \lambda \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\},$$

$V = \{ \lambda \underline{a} \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$ ahol $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$ tetszőleges, rögzített vektor.

NB: $\underline{o} \in V$ tetszőleges V altérre! □

PÉLDÁUL $\mathbb{R}^2$ (illetve $\mathbb{R}^3$) alterei a következők:

ÁLLÍTÁS. (a) $\mathbb{R}^2$ (sík) lehetséges alterei (azaz több nincs):

- az origóból álló egyelemű halmaz
- az origón áthaladó egyenesek
- az egész sík.

(b) $\mathbb{R}^3$ (tér) lehetséges alterei (azaz több nincs):

- az origóból álló egyelemű halmaz
- az origón áthaladó egyenesek

- az origón áthaladó síkok
- az egész tér. □

Most rögzítsük $\mathbb{R}^n$ egy V alterét, és a továbbiakban dolgozzunk V-ben. Első olvasáskor nyugodtan írhatunk V helyett pl. $\mathbb{R}^n$-et!

ÁLLÍTÁS. Ha $W_1, W_2 \le V$ tetszőleges alterek, akkor $W_1 \cap W_2 \le V$ is altér. (Alterek metszete is altér.) □

DEFINÍCIÓ: Ha $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k \in \mathbb{R}^n$, $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, akkor a $\lambda_1\underline{a}_1 + \lambda_2\underline{a}_2 + \dots$ $\dots + \lambda_k\underline{a}_k$ vektort az $\underline{a}_1 \dots \underline{a}_k$ vektorok ($\lambda_1, \dots, \lambda_k$ skalárokkal vett) <u>lineáris kombinációjának</u> nevezzük, röviden $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot \underline{a}_i$ vagy $\sum_{i \le k} \lambda_i \cdot \underline{a}_i$ alakban írjuk. A $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ számokat <u>együtthatóknak</u> hívjuk. A lineáris kombinációt <u>triviálisnak</u> hívjuk, ha az összes együttható 0, azaz $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$.

ÁLLÍTÁS. Ha $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k \in V$ tetszőleges rögzített vektorok, akkor a

$$W := \left\{ \sum_{i \le k} \lambda_i \underline{a}_i \;\middle|\; \lambda_i \in \mathbb{R}\ (i \le k) \right\} \le V$$

halmaz V-nek egy altere (azaz W zárt az összeadás és a skalárral való szorzás műveletére). □

DEFINÍCIÓ. Vektorok egy tetszőleges $H \subseteq V$ halmaza esetén a W alteret a <u>H által generált altérnek</u> (vagy röviden H generátumának) nevezzük, ha W a H-t tartalmazó legszűkebb altér. Azaz $W \supseteq H$, $W \le V$ altér, és tetszőleges $X \supseteq H$, $X \le V$ altérre $X \supseteq W$ (vagyis W a szűkebb altér). H generátumát $< H >$-val jelöljük. □

<u>NB</u>: (0) Természetesen $W \le V$.

(1) H lehet végtelen is, de mi csak véges H halmazokkal foglalkozunk.

(2) $< H >$ mindig létezik, akár véges, akár végtelen H halmazt tekintünk. (Ennek oka: tetszőleges alterek metszete is altér.) Ezt általánosan nem bizonyítjuk, csak véges H halmaz-

ra. Az alábbi Tételben megadjuk H generátumát, véges H halmazok esetén pontosan meg tudjuk adni H generátumát!

TÉTEL: Ha $H = \{\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_k\} \subseteq V$ tetszőleges véges vektorhalmaz, akkor H generátuma az $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_k$ vektorokból képezhető összes lineáris kombinációk halmaza. Képletben:

$$< H > = \left\{ \sum_{i \le k} \lambda_i \underline{a}_i \;\middle|\; \lambda_i \in \mathbb{R} \quad (i \le k) \right\} \qquad \square$$

DEFINÍCIÓ. (i) Az $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_k \in V$ vektorok <u>lineárisan függetlenek</u>, ha csak a triviális lineáris kombinációjuk lehet egyenlő a $\underline{o}$ vektorral. (Azaz ha $\sum_{i \le k} \lambda_i \underline{a}_i = \underline{o}$, akkor $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0$.)

(ii) Ha a vektorok nem lineárisan függetlenek, akkor <u>lineárisan összefüggőnek</u> nevezzük őket. $\square$

ÁLLÍTÁSOK. (1) $k=1$ esetben az $\{\underline{a}\} \subseteq V$ egyelemű halmaz mindig lineárisan független, kivéve az $\underline{a} = \underline{0}$ esetet.

(2) Lineárisan független vektorok között a $\underline{0}$ nem szerepelhet.

(3) Lineárisan független vektorhalmaz bármely részhalmaza is lineárisan független.

(4) Lineárisan összefüggő vektorokhoz további (akármilyen) vektorokat hozzávéve továbbra is lineárisan összefüggő vektorhalmazt kapunk.

$\square$

DEFINÍCIÓ. A $\underline{b} \in V$ vektor <u>kifejezhető</u> az $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_k \in V$ vektorok <u>lineáris kombinációjaként</u>, ha találhatók olyan $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ valós számok, amelyekre $\underline{b} = \sum_{i \le k} \alpha_i \underline{a}_i$. Ekkor azt is mondjuk, hogy a $\underline{b}$ vektor <u>lineárisan függ</u> az $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_k$ vektoroktól. $\square$

ÁLLÍTÁS. A $H = \{\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_k\} \subseteq V$ vektorhalmaz pontosan akkor lineárisan független, ha egyik eleme sem fejezhető ki a többi lineáris kombinációjaként. $\square$

<u>Átfogalmazva</u>: H pontosan akkor lineárisan összefüggő, ha valamelyik eleme lineárisan függ a többitől. □

<u>ÁLLÍTÁS</u>. $H \subseteq V$ pontosan akkor lineárisan független, ha V minden eleme <u>legfeljebb</u> egyféleképpen áll elő H elemeinek lineáris kombinációjaként.
□

<u>DEFINÍCIÓ</u>. A $G \subseteq V$ részhalmaz a V altér <u>generátorrendszere</u>, ha $\langle G \rangle = V$. □

<u>NB</u>: Vegyük észre, hogy $G \subseteq V$ pontosan akkor generátorrendszere V-nek, ha V minden eleme előáll G-beli vektorok lineáris kombinációjaként.

<u>KICSERÉLÉSI TÉTEL</u> (Steinitz): Ha $L \subseteq V$ lineárisan független vektorrendszer, G V-nek egy generátorrendszere, akkor L minden $\underline{u}$ eleméhez található G-nek egy olyan $\underline{g}$ eleme, amelyre az

$$L \setminus \{\underline{u}\} \cup \{\underline{g}\}$$

vektorhalmaz is lineárisan független. □

<u>KÖVETKEZMÉNY</u>: L-nek legfeljebb annyi eleme lehet, mint G-nek. □

<u>DEFINÍCIÓ</u>. Tetszőleges $H \subseteq V$ vektorhalmaz <u>rangja</u> a H-ból kiválasztható, legnagyobb elemszámú, lineárisan független vektorhalmaz elemeinek száma. Ezt a számot $r(H)$ vagy $\rho(H)$-val jelöljük. □

Azaz a H vektorhalmaz rangja r, ha H-ból kiválasztható r db lineárisan független vektor, de bármely $r+1$ db H-beli vektor lineárisan összefüggő.

<u>NB</u>: (1) Ha H csak a $\underline{o}$-t tartalmazza (azaz ha $H=\{\underline{o}\}$, akkor $r(H) = 0$.)
(2) Ha H-ban van legalább egy, $\underline{o}$-tól különböző elem, akkor $r(H) \geq 1$. □

<u>**TÉTEL**</u>. Legyen $H \subseteq V$ tetszőleges véges vektorhalmaz. Ekkor

(a) Ha $r(H) = r$, és $\underline{a}_1,\dots,\underline{a}_r \in H$ lineárisan független vektorok, akkor H minden eleme előáll az $\underline{a}_1,\dots,\underline{a}_r$ vektorok lineáris kombinációjaként.

(b) Ha $\underline{a}_1,\dots\underline{a}_k \in H$ lineárisan független vektorok, és H minden eleme előáll az $\underline{a}_1,\dots,\underline{a}_k$ vektorok lineáris kombinációjaként, akkor $r(H)=k$. □

A fenti tételből könnyen következik az alábbi Tétel:

<u>**TÉTEL**</u>. Ha $\{\underline{a}_1,\dots\underline{a}_k\} \subseteq H$ tovább már nem bővíthető (azaz maximális) lineárisan független vektorhalmaz, akkor $r(H) = k$. □

H -nak egy $\{\underline{a}_1,\underline{a}_2,\dots\underline{a}_k\}$ részhalmaza pontosan akkor "tovább már nem bővíthető" lineárisan független részhalmaz, ha H bármely $\underline{b}$ vektorára, amely különbözik az $\underline{a}_1,\underline{a}_2,\dots,\underline{a}_k$ vektoroktól, az $\{\underline{a}_1,\underline{a}_2,\dots,\underline{a}_k,\underline{b}\}$ halmaz már lineárisan összefüggő, míg persze $\{\underline{a}_1,\underline{a}_2,\dots,\underline{a}_k\}$ lineárisan független.

<u>**DEFINÍCIÓ**</u>. $B \subseteq V$ egy <u>bázisa</u> V-nek, ha B lineárisan független vektorokból áll, és B generátorrendszer V-ben. □

<u>**TÉTEL**</u>. Ha B V-nek egy bázisa, akkor V minden eleme <u>egyértelműen</u> előáll B elemeinek lineáris kombinációjaként. □

<u>**TÉTEL**</u>. Ha V rögzített, akkor V minden bázisa ugyanannyi elemből áll. □

<u>**DEFINÍCIÓ**</u>. A bázisok elemszámát (amely csak V -től függ), <u>V dimenziójának</u> nevezzük, és <u>$\dim(V)$</u> -vel jelöljük. □

<u>**ÁLLÍTÁS**</u>. $\dim(R^n) = n$. □

<u>**ÁLLÍTÁS**</u>. Ha $L \subseteq V$ lineárisan független vektorhalmaz, $G \subseteq V$ generátorrendszer, akkor $|L| \le \dim(V) \le |G|$, ahol $|L|$ jelöli L elemeinek számát, és $|G|$ jelöli G elemeinek számát. □

DEFINÍCIÓ. Ha $B \subseteq V$ bázis, $B = \{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n\}$ és $\underline{u} \in V$, $\underline{u} = \sum_{i \le n} \alpha_i \underline{b}_i$, akkor az α_i számot az $\underline{u}$ vektor (B -re vonatkozó) i -edik koordinátájának nevezzük. □

TÉTEL. (Elemi báziskicserélés). Ha $B \subseteq V$ bázis $B = \{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n\}$, $\underline{c} \in B$ tetszőleges vektor, $\underline{c} \neq \underline{o}$, akkor létezik egy olyan $\underline{b}_t \in B$ bázisvektor, amelyre a

$$B' := B \setminus \{\underline{b}_t\} \cup \{\underline{c}\}$$

vektorhalmaz is bázis. □

SŐT, tetszőleges $\underline{u} \in V$, $\underline{u} = \sum_{i \le n} \mu_i \underline{b}_i$ vektor B'-beli koordinátái könnyen számolhatóak. (Algoritmus: elemi bázistranszformáció.)

Képletekben: ha $\underline{c} = \sum_{i \le n} \lambda_i \underline{b}_i$, és a főelem $\lambda_t \neq 0$, akkor az $\underline{u}$ vektor új koordinátái a $B' = B \setminus \{\underline{b}_t\} \cup \{\underline{c}\}$ bázison a következőek:

$$i \neq t \text{ esetén} \qquad \mu_i^{új} = \mu_i^{régi} - \frac{\mu_t^{régi} \lambda_i}{\lambda_t}$$

és

$$i = t \text{ esetén} \qquad \mu_t^{új} = \frac{\mu_t^{régi}}{\lambda_t}.$$ □

A fenti algoritmus alkalmazásai: rang meghatározása, lineáris függetlenség meghatározása; vektor előállítása többi (adott) vektorral; áttérés új bázisra (vektor új koordinátái új bázisban); lineáris egyenletrendszerek megoldása, mátrix inverzének meghatározása.

Lineáris leképezések

DEFINÍCIÓ. Legyenek $V \subseteq \mathbb{R}^k$, $W \subseteq \mathbb{R}^\ell$ tetszőleges alterek. Az $\mathcal{A} : V \to W$ függvényt lineáris leképezésnek nevezzük, ha tetszőleges $\underline{u}, \underline{v} \in V$ vektorokra és $\lambda \in \mathbb{R}$ valós számra

$$\mathcal{A}(\underline{u}+\underline{v}) = \mathcal{A}(\underline{u}) + \mathcal{A}(\underline{v})$$

és

$$\mathcal{A}(\lambda \underline{v}) = \lambda \cdot \mathcal{A}(\underline{v})$$

A $W=V$ esetben az $\mathcal{A} : V \to V$ lineáris leképezéseket lineáris transzformációknak is nevezzük. □

NB: Néha $\mathcal{A}(\underline{v})$ helyett egyszerűen csak $\mathcal{A}\underline{v}$ -t írunk.

NB: $\mathcal{A}(\underline{o}) = \underline{o}$ tetszőleges $\mathcal{A} : V \to W$ lineáris leképezésre.

ÉSZREVÉTEL. $\mathcal{A}(\lambda_1\underline{v}_1+\lambda_2\underline{v}_2+ \dots +\lambda_k\underline{v}_k) = \lambda_1\mathcal{A}(\underline{v}_1)+\lambda_2\mathcal{A}(\underline{v}_2)+\dots+\lambda_k\mathcal{A}(\underline{v}_k)$, vagy rövidebben $\mathcal{A}\left(\sum\limits_{i\le k} \lambda_i \underline{v}_i\right) = \sum\limits_{i\le k} \lambda_i \mathcal{A}(\underline{v}_i)$. □

Ebből következik:

TÉTEL. $\mathcal{A}$ -t egyértelműen meghatározzák V egy bázisán felvett értékei.

□

Azaz, ha $B = \{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n\} \subseteq V$ bázis, akkor elegendő az $\mathcal{A}(\underline{e}_1)$, $\mathcal{A}(\underline{e}_2)$, ..., $\mathcal{A}(\underline{e}_n)$ vektorokat ismernünk ahhoz, hogy bármely $\underline{v} \in V$ vektorra $\mathcal{A}(\underline{v})$-t meghatározhassuk.

DEFINÍCIÓ. (i) Legyenek A, B tetszőleges halmazok. Ha $f : A \to B$ egy olyan függvény, amely injektív (azaz kölcsönösen egyértelmű) és szürjektív (azaz ráképezés), akkor bijekciónak nevezzük.

(ii) Ha $\mathcal{A} : V \to W$ lineáris leképezés, és bijekció, akkor alterek közötti izomorfizmusnak nevezzük. □

TÉTEL. Ha $\dim(V) = \dim(W)$, akkor V és W izomorfak (azaz létezik egy $\mathcal{A} : V \to W$ izomorfizmus). □

DEFINÍCIÓ. $\mathrm{Ker}(\mathcal{A}) := \{\underline{v} \in V : \mathcal{A}(\underline{v}) = \underline{o}\}$ az $\mathcal{A}$ lineáris leképezés magtere.
$\mathrm{Im}(\mathcal{A}) := \{\underline{y} \in W \mid \underline{y} = \mathcal{A}(\underline{v})$ valamely $\underline{v} \in V$ vektorra$\}$ az $\mathcal{A}$ lineáris leképezés képtere. □

ÁLLÍTÁS. (i) $\mathcal{A}$ pontosan akkor injektív, ha $\mathrm{Ker}(\mathcal{A}) = \{\underline{o}\}$.
(ii) $\mathcal{A}$ pontosan akkor szürjektív, ha $\mathrm{Im}(\mathcal{A}) = W$. □

ÁLLÍTÁS. (i) $\mathrm{Ker}(\mathcal{A}) \subseteq V$ altér.
(ii) $\mathrm{Im}(\mathcal{A}) \subseteq W$ altér. □

Többek között: $\underline{o} \in \mathrm{Ker}(\mathcal{A})$ és $\underline{o} \in \mathrm{Im}(\mathcal{A})$.

Lineáris leképezés mátrixa

DEFINÍCIÓ: Egy tetszőleges $A : \mathbb{I}_m \times \mathbb{I}_n \to \mathbb{R}$ függvényt (valós számokból álló) mátrixnak nevezünk, melynek m sora és n oszlopa van.

Az $(i,j) \in \mathbb{I}_m \times \mathbb{I}_n$ helyen felvett függvényértéket, az $A(i,j)$ értéket $[A]_{i,j}$ -vel, vagy $a_{i,j}$ -vel jelöljük, és a mátrix i -dik sorában és j -dik oszlopában álló elemének nevezzük. □

A mátrix elemeit az alábbi módon szoktuk elrendezni:

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & & & \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

DEFINÍCIÓ: $\mathbb{R}^{m\times n}$ jelöli az $m\times n$ méretű mátrixok halmazát. □

ÁLLÍTÁS. Legyen $\mathcal{A}: V \to W$ lineáris leképezés, $E = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n\} \subseteq V$ és $F = \{\underline{f}_1, \ldots, \underline{f}_m\} \subseteq W$ bázisok. Legyen még $\mathcal{A}(\underline{e}_i) = \sum_{j \le m} \zeta_j^{(i)} \underline{f}_j$ (ahol $i = 1, 2, \ldots, n$). Ekkor tetszőleges $\underline{v} \in V$ vektorra, ha $\underline{v} = \sum_{i \le n} \nu_i \underline{e}_i$, akkor

$\mathcal{A}(\underline{v})$-nek (F -re vonatkozó) W-beli koordinátáit a következő módon számolhatjuk ki: $\mathcal{A}(\underline{v}) = \sum_{j\le m} \mu_j \underline{f}_j$, ahol $\mu_j = \zeta_j^{(1)}\nu_1 + \zeta_j^{(2)}\nu_2 + \ldots + \zeta_j^{(n)}\nu_n$.

□

NB. (1) Tehát a $\zeta_1^{(i)}, \zeta_2^{(i)}, \ldots, \zeta_m^{(i)}$ számok éppen az $\mathcal{A}(\underline{e}_i)$ vektor (F bázisra vonatkozó) koordinátái, vagyis a $\zeta_j^{(i)}$ szám felső i indexe a vektorra utal, az alsó j indexe pedig a koordinátára. Így talán könnyebben megjegyezhetjük a felső és alsó indexek jelentését, és ezért választottuk ezt az írásmódot a szokásos $\zeta_{i,j}$ helyett!

(2) Felhívjuk a figyelmet arra, hogy $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ nem a $\underline{v} \in V$ vektor komponensei, hanem az E bázisra vonatkozó koordinátái !

DEFINÍCIÓ: Az $[A]_{j,i} = \zeta_j^{(i)}$ $(i\le n,\ j\le m)$ egyenlőséggel definiált $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mátrixot az $\mathcal{A}$ lineáris leképezés (E és F bázisokra vonatkozó) mátrixának nevezzük. □

NB. Az $\mathcal{A}$ leképezés A mátrixának i -edik oszlopa nem más, mint az $\mathcal{A}(\underline{e}_i) \in W$ vektor koordinátái (persze az F bázisban), minden $i=1,2,\ldots,n$ indexre.

TEHÁT: $\mathcal{A}(\underline{v}) \in W$ j -edik koordinátáját az A mátrix j -dik sorából és a $\underline{v}$ vektor (E -beli) koordinátáiból kapjuk. (Az A mátrix j -edik sora az $\mathcal{A}(\underline{e}_i)$ vektorok j -edik koordinátáit tartalmazza (F -ben felírva).)

DEFINÍCIÓ. Tetszőleges $\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$, $\underline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ vektorok esetén a $\sum_{i\le n} a_i b_i$ valós számot az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ skaláris szorzatának nevezzük, és $\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle$ -vel jelöljük. Más szintén elterjedt jelölések: $\underline{a}\cdot\underline{b}$, $(\underline{a}, \underline{b})$, $\langle \underline{a} | \underline{b} \rangle$.

□

Tehát: $\mathcal{A}(\underline{v})$ j -edik (F -re vonatkozó) koordinátája nem más, mint az A mátrix j -edik sorának és a $\underline{v}$ vektor (E -re vonatkozó) koordinátáiból, mint komponensekből álló ($\mathbb{R}^n$-beli) vektor skaláris szorzata. □

ÁLLÍTÁS: Tetszőleges $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w} \in V$ vektorokra és $\lambda \in \mathbb{R}$ számra

(i) $\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = \langle \underline{v}, \underline{u} \rangle$ (a skaláris szorzat szimmetrikus)

(ii) $\langle \underline{u}+\underline{w}, \underline{v} \rangle = \langle \underline{u}, \underline{v} \rangle + \langle \underline{w}, \underline{v} \rangle$

(iii) $\langle \lambda\underline{u}, \underline{v} \rangle = \lambda\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle$.

Továbbá, az előző pontokból következik:

(ii') $\langle \underline{u}, \underline{v}+\underline{w} \rangle = \langle \underline{u}, \underline{v} \rangle + \langle \underline{u}, \underline{w} \rangle$

(iii') $\langle \underline{u}, \lambda\underline{v} \rangle = \lambda\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle$

Végül

(iv) $\langle \underline{u}, \underline{u} \rangle \geq 0$ és $\langle \underline{u}, \underline{u} \rangle = 0$ pontosan akkor, ha $\underline{u} = \underline{0}$

(a skaláris szorzat pozitív definit)

□

NB: Az (ii), (iii), (ii'), (iii') tulajdonságokat együtt úgy is mondhatjuk (új szakkifejezés), hogy a

$$\langle\, .\, ,\, .\, \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad , \quad (\underline{u}, \underline{v}) \mapsto \langle \underline{u}, \underline{v} \rangle$$

kétváltozós függvény bilineáris. □

DEFINÍCIÓ: $\underline{u}$, $\underline{v} \in V$ merőleges (ortogonális), jelben $\underline{u} \perp \underline{v}$, ha $\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = 0$.

□

ÁLLÍTÁS. Tetszőleges $\underline{u} \in V$ vektorra $\langle \underline{u}, \underline{o} \rangle = 0$. □

TÉTEL. Ha az $\underline{a}_1$, $\underline{a}_2$, ... $\underline{a}_k \in V$ vektorok páronként merőlegesek (azaz $\underline{a}_i \perp \underline{a}_j$ ha $i, j \leq k$, $i \neq j$), akkor lineárisan függetlenek. □

Térjünk vissza vizsgálatunk fő tárgyára: a lineáris leképezésekhez és a mátrixokhoz.

DEFINÍCIÓ: Rögzített V, W esetén

$$\mathrm{Hom}(V,W) := \{ \mathcal{A} \mid \mathcal{A} : V \to W \text{ lineáris leképezés } \}$$

□

NB. Hom a homomorfizmus (művelettartó függvény) szó rövidítése.

Jegyezzük meg tehát, hogy rögzített V, W alterek, és $E \subseteq V$, $F \subseteq W$ bázisok esetén tetszőleges $\mathcal{A} : V \to W$ lineáris leképezéshez egyértelműen hozzárendelhettünk egy $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mátrixot ($n=\dim(V)$, $m=\dim(W)$). Sőt mint belátható, <u>tetszőleges</u> $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mátrixhoz található olyan $\mathcal{A} : V \to W$ lineáris leképezés, amelynek mátrixa éppen A. E gondolatmenetünk azt igazolja, hogy a fenti megfeleltetés bijekció $\mathrm{Hom}(V,W)$ és $\mathbb{R}^{m \times n}$ között.

Most műveleteket definiálunk a $V \to W$ lineáris leképezések, illetve a rögzített $m \times n$ típusú mátrixok halmazán. Mégpedig úgy, hogy e műveletek összhangban legyenek (ld. előadás).

<u>DEFINÍCIÓ</u>. Ha $\mathcal{A} : V \to W$ lineáris leképezés, $\lambda \in \mathbb{R}$ tetszőleges valós szám, akkor $\lambda\mathcal{A} : V \to W$ a következő leképezés :

$$(\lambda\mathcal{A})(\underline{v}) := \lambda(\mathcal{A}\underline{v})$$

tetszőleges $\underline{v} \in V$ vektorra. □

<u>ÁLLÍTÁS</u>. $\lambda\mathcal{A}$ is lineáris leképezés . □

<u>DEFINÍCIÓ</u>. $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tetszőleges mátrixra és $\lambda \in \mathbb{R}$ számra $\lambda \cdot A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a következő mátrix:

$$[\lambda A]_{j,i} = \lambda \cdot [A]_{j,i} \qquad (i \le n,\ j \le m)$$

(azaz A minden elemét megszorozzuk λ -val). □

<u>ÁLLÍTÁS</u>. Ha $\mathcal{A}$ mátrixa A, akkor $\lambda\mathcal{A}$ mátrixa $\lambda \cdot A$. □

<u>DEFINÍCIÓ</u>: (i) Ha $\mathcal{A}, \mathcal{B} : V \to W$ lineáris leképezések, akkor $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ a következő $V \to W$ leképezés:

$$(\mathcal{A} + \mathcal{B})(\underline{v}) := \mathcal{A}(\underline{v}) + \mathcal{B}(\underline{v})$$

tetszőleges $\underline{v} \in V$ vektorra. □

<u>ÁLLÍTÁS</u>. $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ is lineáris leképezés . □

DEFINÍCIÓ $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tetszőleges mátrixok esetén $A+B$ a következő $\mathbb{R}^{m\times n}$ -beli mátrix :

$$[A+B]_{j,i} := [A]_{j,i} + [B]_{j,i} \qquad (i\le n,\ j\le m)$$

(azaz A és B megfelelő elemeit összeadjuk). □

ÁLLÍTÁS. Ha $\mathcal{A}$ mátrixa A, $\mathcal{B}$ mátrixa B, akkor $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ mátrixa $A+B$.
□

TÉTEL: (i) $\mathrm{Hom}(V,W)$ -ben a fenti összeadás és skalárral való szorzás kielégíti az Alaptétel (I)-(VIII) tulajdonságait.

(ii) $\mathbb{R}^{m\times n}$ -ben a fenti összeadás és skalárral való szorzás kielégíti az Alaptétel (I)-(VIII) tulajdonságait.

(iii) $\mathrm{Hom}(V,W)$ és $\mathbb{R}^{m\times n}$ $(n=\dim(V),\ m=\dim(W))$ között létezik izomorfizmus.
□

DEFINÍCIÓ: Ha $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times k}$ tetszőleges mátrixok, akkor $A\cdot B$ a következő, $\mathbb{R}^{m\times k}$ -beli mátrix:

$$[A\cdot B]_{j,i} = \sum_{t\le n} [A]_{j,t} \cdot [B]_{t,i}$$

(azaz az $A\cdot B$ j -edik sorának i -dik oszlopában lévő elem nem más, mint A j-edik sorának és B i-edik oszlopának skaláris szorzatával). □

Szemléletesen (rajzban): ún. Falk-módszer (ld. előadás) .

ÁLLÍTÁS. Ha $\mathcal{B} : H \to V$, $\mathcal{A} : V \to W$ lineáris leképezések , $K \subseteq H$, $E \subseteq V$, $F \subseteq W$ bázisok, $\mathcal{A}$ mátrixa A (a K, E bázisokra vonatkozóan) , $\mathcal{B}$ mátrixa B (az E, F bázisokra vonatkozóan) , akkor $\mathcal{A}\circ\mathcal{B}$ mátrixa $A\cdot B$ (a K, F bázisokra vonatkoztatva). □

NB. (i) Lineáris leképezések kompozícióját (pl. a fenti állítás hatására) a leképezések szorzatának is nevezik.

(ii) Mint említettük, a mátrixok összeadását, szorzását, és rögzített $\lambda\in\mathbb{R}$ számmal való szorzását úgy igyekeztünk definiálni, hogy azok összhangban legyenek a lineáris leképezések közötti műveletekkel. Mint az előbbi három állítás mutatja, ez sikerült.

Speciális mátrixok és a mátrixműveletek tulajdonságai: ld. [S] 63-74. old.

Figyelem! Az alábbi fogalmakra az [S]-ben használt jelölések eltérnek az általunk használtaktól:

DEFINÍCIÓ: Ha $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, akkor A transzponáltja, $A^T \in \mathbb{R}^{n\times m}$ a következő mátrixot jelöli: $[A^T]_{i,j} := [A]_{j,i}$. □

Ezt [S]-ban A^* jelöli! Azaz A -t tükrözzük a főátlóra: az $a_{1,1}$, $a_{2,2}$, $a_{3,3}$... elemek által meghatározott egyenesre - ha $a_{j,i}$ az A mátrix j-dik sorának i-dik elemét jelöli. Más szóval, A-ban felcseréljük az oszlopokat és sorokat.

Lineáris leképezések és mátrixok inverze

JELÖLÉS: (i) $\mathcal{I} : V \to V$ az identikus transzformáció, azaz $\mathcal{I}(\underline{v}) = \underline{v}$ minden $\underline{v} \in V$ vektorra

(ii) $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$ az egységmátrix: a főátlóban levő elemek 1 (képletben: $[I]_{i,i}=1$ ha $i\le n$), és a többi elem 0 (azaz $[I]_{i,j}=0$ ha $i,j\le n$, $i\ne j$).

□

NB: I helyett használatos még az $E \in \mathbb{R}^{n\times n}$ jelölés is.

Bárki könnyen beláthatja, hogy tetszőleges $E \subseteq V$ bázisban az $\mathcal{I} : V \to V$ identikus transzformáció mátrixa éppen I .

Legyen ezentúl $\mathcal{A} : V \to V$ tetszőleges lineáris transzformáció, illetve $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tetszőleges négyzetes mátrix.

ÁLLÍTÁS. (i) Ha $\mathcal{B},\mathcal{C} : V \to V$ olyan függvények, amelyekre $\mathcal{A}\circ\mathcal{B} = \mathcal{C}\circ\mathcal{A} = \mathcal{I}$, akkor $\mathcal{B} = \mathcal{C}$,

(ii) Ha $B,C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ olyan mátrixok, amelyekre $AB = CA = I$, akkor $B = C$.

□

ÁLLÍTÁS. Ha $\mathcal{A} : V \to V$ lineáris transzformáció, $\mathcal{B} : V \to V$ függvény, és $\mathcal{A}\circ\mathcal{B} = \mathcal{I}$, akkor $\mathcal{B}$ is lineáris transzformáció. □

(Nem bizonyitjuk!)

DEFINÍCIÓ. (i) A $\mathcal{B} : V \to V$ lineáris transzformációt az $\mathcal{A} : V \to V$ lineáris transzformáció inverzének nevezzük, ha $\mathcal{A}\circ\mathcal{B} = \mathcal{B}\circ\mathcal{A} = \mathcal{I}$. $\mathcal{A}$ inverzét $\mathcal{A}^{-1}$ -el jelöljük.

(ii) A $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix inverze, ha $AB = BA = I$. Az A mátrix inverzét A^{-1} -el jelöljük. Az A mátrixot invertálható -nak nevezzük, ha létezik inverze. □

NB: Könnyen belátható, hogy ha az $\mathcal{A} : V \to V$ lineáris transzformáció mátrixa A (az $E \subseteq V$ rögzitett bázisban), akkor $\mathcal{A}^{-1}$ mátrixa A^{-1} (szintén az $E \subseteq V$ bázisban).

ÁLLÍTÁS. Az $\mathcal{A} : V \to V$ lineáris transzformáció pontosan akkor injektiv, ha $\mathrm{Ker}(\mathcal{A}) = \{\underline{0}\}$. □

TÉTEL: Egy $\mathcal{A} : V \to V$ lineáris transzformáció pontosan akkor invertálható, ha $\mathrm{Im}(\mathcal{A}) = V$. □

(Nem bizonyitjuk!)

NB: A Tétel nem csak $V \subseteq \mathbb{R}^{\ell}$ altereire igaz, hanem tetszőleges, véges dimenziós V vektorterekre is (ld. pl. [H], 82. oldal).

A fenti Állitás és Tétel kapcsolatát világitja meg az alábbi eredmény:

TÉTEL: $\dim(\mathrm{Ker}(\mathcal{A})) + \dim(\mathrm{Im}(\mathcal{A})) = \dim(V)$ □

(Nem bizonyitjuk!)

A fenti eredmények miatt érdemes általános $V \to W$ lineáris leképezések rangját definiálnunk:

DEFINÍCIÓ: Tetszőleges $\mathcal{A}: V\to W$ lineáris leképezés esetén $r(\mathcal{A}) := \dim(\mathrm{Im}(\mathcal{A}))$ az $\mathcal{A}$ leképezés rangja. $r(\mathcal{A})$ helyett szokásos még a $\rho(\mathcal{A})$ jelölés is. □

<u>NB</u>: A fenti eredmények szerint $\mathcal{A}$ pontosan akkor invertálható, ha $\rho(\mathcal{A}) = \dim(V)$. □

<u>DEFINÍCIÓ</u>: Legyen $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tetszőleges mátrix, és oszlopvektorai legyenek $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_n \in \mathbb{R}^m$ (azaz $A = [\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_n]$). Ekkor $r(A) := r\{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_n\}$ az A <u>mátrix rangja</u>. (Szokásos még a $\rho(A)$ jelölés is.)
□

<u>TÉTEL</u>. Egy $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ négyzetes mátrixnak pontosan akkor létezik inverze, ha $r(A) = n$. □

A fenti Tétel lényegében az alábbi tényekből következik:

<u>TÉTEL</u>. Legyen $\mathcal{A}: V \to V$ tetszőleges lineáris transzformáció, $E \subseteq V$ tetszőleges bázis és $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ az $\mathcal{A}$ transzformáció mátrixa. Ekkor

(i) $r(\mathcal{A}) = r(A)$

(ii) $\mathcal{A}$ -nak pontosan akkor létezik inverze, ha A invertálható.

(iii) $\mathcal{A}^{-1}$ mátrixa A^{-1} (ugyancsak az E bázisban). □

<u>NB</u>: A Tétel egyik lényeges pontja a következő: teljesen mindegy, hogy milyen V-beli bázisban írjuk fel az $\mathcal{A}$ transzformáció A mátrixát!

<u>Algoritmus</u> mátrix inverzére: elemi bázistranszformációval. (n db egyenletrendszert kell szimultán megoldanunk, ld. előadás.)

<u>TÉTEL</u>. Ha az $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixok mindegyike invertálható, akkor
$$(A\cdot B)^{-1} = B^{-1}\cdot A^{-1} .$$ □

<u>NB</u>: Figyeljük meg a sorrendet: $(AB)^{-1}$ és $B^{-1}\cdot A^{-1}$!

Az alábbi eredmény néha megkönnyítheti mátrixok rangjának kiszámítását.

<u>DEFINÍCIÓ</u>: Legyen $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tetszőleges mátrix. Legyenek oszlopvektorai $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_n \in \mathbb{R}^m$ (képletben $A=[\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_n]$), és legyenek sorvektorai

$\underline{a}^1, \underline{a}^2, \ldots, \underline{a}^m \in \mathbb{R}^n$ (jelben $A = \begin{bmatrix} \underline{a}^1 \\ \underline{a}^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \underline{a}^m \end{bmatrix}$). Ekkor legyen

(i) $r_{oszlop}(A) := r(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_n)$ az A mátrix <u>oszlop-rangja</u>.

(Ez ugye nem más, mint az A mátrix rangja.)

(ii) $r_{sor}(A) := r(\underline{a}^1, \underline{a}^2, \ldots, \underline{a}^m)$ az A mátrix <u>sor-rangja</u>. □

<u>TÉTEL</u>. Tetszőleges $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ mátrixra $r_{oszlop}(A) = r_{sor}(A)$ □

(Nem bizonyítjuk!)

Speciális lineáris leképezések

(0) geometriai transzformációk

(1) $pr_k : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} \mapsto x_k$

a <u>k -dik projekció (vetítő)</u> függvény ($k \le n$).

(<u>NB</u>: Tudjuk, hogy $\mathbb{R}$ és $\mathbb{R}^1$ azonosítható!)

(2) $in_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ x \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}$ (← k -dik komponens)

a <u>k -dik injekció (beágyazás)</u> függvény ($k \le n$).

<u>ÁLLÍTÁS</u>: $id_{\mathbb{R}^n} = in_1 \circ pr_1 + in_2 \circ pr_2 + \ldots + in_n \circ pr_n$ □

Itt $id_{\mathbb{R}^n} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ az <u>identitás</u> (azonosság v. helybenhagyás) <u>transzformáció</u>: $id_{\mathbb{R}^n}(\underline{x}) = \underline{x}$ minden $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ vektorra. Továbbá, az Állítás képletében szereplő + a lineáris leképezések közötti összeadást jelöli.

(Az Állítás sokkal közérthetőbb, de vele ekvivalens megfogalmazása:

minden $\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ vektorra

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \dots + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

-- ami persze nyilvánvaló.) □

DEFINÍCIÓ: Tetszőleges $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ lineáris leképezésre $\mathrm{Im}(\varphi)$ -t $\underline{0}$ -n (origón) átmenő egyenes -nek hívjuk. □

NB: n=2 és n=3 esetben ez megegyezik a szokásos geometriai fogalommal (ami az alábbi állításból könnyen látszik):

ÁLLÍTÁS. Ha $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ lineáris leképezés, akkor $\mathrm{Im}(\varphi) = \{ \lambda\underline{a} \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$ valamilyen $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$ vektorra. (Biz: $\underline{a} := \varphi(1)$.) □

DEFINÍCIÓ: Tetszőleges $H \subseteq \mathbb{R}^n$ vektorhalmaz és $\underline{y} \in \mathbb{R}^n$ vektor esetén

$$H + \underline{y} := \{ \underline{h} + \underline{y} \mid \underline{h} \in H \}$$

a H halmaz $\underline{y}$ vektorral történt eltoltja. □

NB: n=2 és n=3 esetben ez megegyezik a szokásos geometriai fogalommal!
De $H + \underline{y}$ általában nem altér, még akkor sem, ha $H \leq V$ altér!

DEFINÍCIÓ: Ha $f \leq \mathbb{R}^n$ tetszőleges origón átmenő egyenes és $\underline{y} \in \mathbb{R}^n$ tetszőleges vektor, akkor az $f + \underline{y}$ halmazt $\underline{y}$ -on áthaladó egyenesnek hívjuk. □

DEFINÍCIÓ: $\mathbb{R}^n$ -nek tetszőleges (n-1) -dimenziós $V \leq \mathbb{R}^n$ alterét $\mathbb{R}^n$ egy hipersíkjának nevezzük. □

Lineáris egyenletrendszerek

Az n ismeretlenes, m egyenletből álló lineáris egyenletrendszer könnyen felírható $\boxed{A \cdot \underline{x} = \underline{b}}$ alakban, ahol $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ az <u>együtthatómátrix</u>, $\underline{b} \in \mathbb{R}^m$ a <u>jobboldali-vektor</u>, és $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ az <u>ismeretlen-vektor</u>.

De az egyenletrendszer írható $\boxed{\mathcal{A}(\underline{x}) = \underline{b}}$ alakban is, ahol $\mathcal{A}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineáris leképezés, $\underline{b} \in \mathbb{R}^m$ adott vektor, és $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ a keresett vektor.

<u>TÉTEL</u>. Legyen $H \subseteq \mathbb{R}^n$ az $A\underline{x} = \underline{0}$ ún. "<u>homogén</u>" egyenletrendszer megoldásainak halmaza; és legyen $\underline{x}_o \in \mathbb{R}^n$ az $A\underline{x} = \underline{b}$ ún. "<u>inhomogén</u>" egyenletrendszer egy tetszőleges, rögzített megoldása. Ekkor az $A\underline{x} = \underline{b}$ inhomogén egyenletrendszer összes megoldásának $M \subseteq \mathbb{R}^n$ halmaza a következőképpen írható fel:

$$M = H + \underline{x}_o$$

(azaz $M = \{\, \underline{h} + \underline{x}_o \mid \underline{h} \in \mathbb{R}^n,\ A\underline{h} = \underline{0} \,\}$. $\square$

<u>ÁLLÍTÁS</u>. Az egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha $\underline{b} \in \mathrm{Im}(\mathcal{A})$ $\square$

<u>TÉTEL</u>. Az egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg egyértelműen (azaz éppen egy megoldása van), ha megoldható és $\mathrm{Ker}(\mathcal{A}) = \{\underline{0}\}$. $\square$

<u>ÁLLÍTÁS</u>. Az $\mathcal{A}(\underline{x}) = \underline{0}$ homogén egyenletrendszer megoldásainak halmaza nem más, mint $\mathrm{Ker}(\mathcal{A})$. $\square$

<u>Egyenletrendszer megoldása mátrixokkal:</u> ld. [T], 37.-38. oldalakon.

A <u>megoldhatóság vizsgálata</u>:

Legyenek az A együtthatómátrix oszlopvektorai $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n \in \mathbb{R}^m$.

ÁLLÍTÁS. $A\underline{x} = \underline{b}$ lineáris egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha $r\{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_n\} = r\{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_n, \underline{b}\}$ □

TÉTEL. Az $A\underline{x} = \underline{b}$ lineáris egyenletrendszernek (tetszőleges $\underline{b} \in \mathbb{R}^m$ jobboldal esetén) pontosan akkor van egynél több megoldása, ha megoldható, és $r(A) < n$. □

DEFINÍCIÓ: Az $\underline{x} = \underline{0}$ vektort az $A\underline{x} = \underline{0}$ homogén egyenletrendszer triviális megoldásának nevezzük. Az $A\underline{x} = \underline{0}$ egyenletrendszer $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ megoldása nem triviális megoldás, ha $\underline{x} \neq \underline{0}$. □

NB: Ha az egyenletrendszernek egynél több megoldása van, akkor végtelen sok megoldása van.

A fenti tételből könnyen következik az alábbi Tétel:

TÉTEL: Az $A\underline{x} = \underline{0}$ homogén lineáris egyenletrendszernek ($A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\underline{0} \in \mathbb{R}^m$, $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$) pontosan akkor van nem triviális megoldása, ha $r(A) < n$.

□

ÁTTÉRÉS ÚJ BÁZISRA

Legyen $E = \{\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n\}$ és $F = \{\underline{f}_1, \ldots, \underline{f}_n\}$ két tetszőleges, rögzített bázis V-ben.

I. Kérdés: ha ismerjük egy tetszőleges $\underline{b} \in V$ vektor $\beta_1, \ldots, \beta_n$ koordinátáit az E bázisban, akkor mik ugyanezen $\underline{b} \in V$ vektor $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ koordinátái az F bázisban? (Azaz: $\underline{b} = \sum_{i \le n} \beta_i \underline{e}_i$, és $\underline{b} = \sum_{i \le n} \gamma_i \underline{f}_i$.)

VÁLASZ: Álljanak a $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix oszlopvektorai az $\underline{f}_1, \underline{f}_2, \ldots, \underline{f}_n$ új bázisvektorok (az E régi bázisban felírt) koordinátáiból.
(B -t az új bázisra való áttérés mátrixá -nak is nevezhetjük.)

Ekkor bevezetve a $\underline{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}$ és $\underline{\gamma} = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{bmatrix}$ rövidítéseket, kapjuk a következő Tételt:

TÉTEL. $\underline{\beta} = B \cdot \underline{\gamma}$, azaz $\underline{\gamma} = B^{-1}\underline{\beta}$. □

II. Kérdés: ha ismerjük az $\mathcal{A}: V \to V$ lineáris transzformáció A mátrixát az E bázisban, akkor hogyan kaphatjuk meg e transzformáció T mátrixát az új, F bázisban?

VÁLASZ: Az előzőekhez hasonlóan, legyenek a $\underline{b}$, $\underline{d} \in V$ vektorok koordinátái a régi (E) bázisban

$$\underline{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} \quad \text{ill.} \quad \underline{\delta} = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_n \end{bmatrix} ,$$

továbbá legyenek e vektorok új koordinátái (az F bázisban)

$$\underline{\gamma} = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{bmatrix} \quad \text{ill.} \quad \underline{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix} .$$

$\mathcal{A}(\underline{b}) = \underline{d}$ ekvivalens $A\underline{\beta} = \underline{\delta}$ -val, így a fenti Tétel alapján $A \cdot B\underline{\gamma} = B\underline{\varepsilon}$, vagyis (mindkét oldalt B^{-1}-el balról szorozva) $B^{-1}AB\underline{\gamma} = \underline{\varepsilon}$. Ezzel bebizonyítottuk az alábbi Tételt:

TÉTEL. Ha az $\mathcal{A}: V \to V$ transzformáció mátrixa az E bázisban A , akkor e transzformáció új (F) bázisban való mátrixa $\boxed{B^{-1}AB}$ (ahol B az új bázisra való áttérés mátrixa). □

Négyzetes mátrix determinánsa

DEFINÍCIÓ: Ha $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ négyzetes mátrix, $i, j \le n$, akkor az A mátrix $A_{i,j} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ részmátrixát a következőképpen kapjuk: elhagyjuk az A mátrix i -edik sorát és j -edik oszlopát. □

DEFINÍCIÓ: (i) Ha $A \in \mathbb{R}^{1\times 1}$, $A = [a_{11}]$ mátrix, akkor <u>det(A)</u> $:= a_{11}$ az A (1x1 -es) mátrix <u>determinánsa</u>.
(ii) Ha $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $n \ge 2$, A elemei $a_{i,j}$ $(i,j \le n)$, akkor

$$\underline{\det(A)} := \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j}\, a_{i,j}\cdot \det(A_{i,j})$$

az A nxn -es mátrix <u>determinánsa</u>. Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (négyzetes) mátrix determinánsát általában <u>det(A)</u> -val, vagy néha <u>|A|</u> -val jelöljük.

□

<u>NB</u>: a definíció szerint mi a mátrix determinánsát a mátrix első sora szerint fejtettük ki. Azonban, mint bebizonyítható: a determináns a mátrix <u>bármelyik</u> sora (sőt bármelyik oszlopa) szerint is kifejthető, az eredmény ugyanaz a valós szám lesz! ("Sakktábla"-szabály) Speciálisan, n=2 esetén $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ (vagyis a főátlóban lévő elemek szorzata mínusz a mellékátlóban lévők szorzata) .

<u>Determináns tulajdonságai</u>: ld. [S] 2.1.5. fejezetét az 54-59. oldalakon, vagy esetleg [BK, S] megfelelő részét, továbbá az előadáson elhangzottakat.

Legyen adott az $A\underline{x} = \underline{b}$ lineáris egyenletrendszer, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\underline{x}, \underline{b} \in \mathbb{R}^{n}$. Legyen $D := \det(A)$, továbbá jelölje D_k annak a mátrixnak a determinánsát, melyet úgy kapunk, hogy az A mátrix k -dik oszlopa helyére a $\underline{b}$ oszlopvektort írjuk (k ≤ n tetszőleges).

<u>TÉTEL</u>. (<u>CRAMER szabálya</u>): $D\cdot x_k = D_k$ minden $k \le n$ indexre. □
(Nem bizonyítjuk!)

<u>NB</u>: ne feledjük, hogy D, x_k, $D_k \in \mathbb{R}$ valós számok!

A tételből könnyen következnek az alábbi állítások:

ÁLLÍTÁS. (1) Ha $D\neq 0$, akkor az egyenletrendszer egyértelműen megoldható.
(2) Ha $D=0$ és valamely $k \le n$ indexre $D_k \neq 0$, akkor az egyenletrendszer nem oldható meg.
(3) Ha $D=0$ és $D_k=0$ minden $k \le n$ indexre, akkor az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van. □

NB: A (3) esetben Cramer szabálya nem ad módszert a megoldások megkeresésére!

KÖVETKEZMÉNY. Az $A\underline{x} = \underline{0}$ homogén egyenletrendszernek ($A \in \mathbb{R}^{n\times n}$) pontosan akkor van triviálistól különböző megoldása, ha az A mátrix determinánsa nulla (azaz: $\det(A) = 0$). □

A determinánsok segítségével mátrixok inverzét is ki tudjuk számolni. Bár ez technikailag sokkal bonyolultabb mint az elemi bázistranszformáción alapuló algoritmus (sokkal többet kellene számolni). Mindössze csak azért ismertetjük, mert más tanulmányokban szükség lesz rá.

DEFINÍCIÓ: Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tetszőleges mátrix. A $B = [b_{i,j}]_{i,j\le n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixot az A mátrix klasszikus adjungáltjának nevezzük, és adj(A) -val jelöljük, ha $b_{i,j} = (-1)^{i+j}\det(A_{j,i})$, ahol $A_{j,i}$ az A mátrix j -dik sorához és i -dik oszlopához tartozó részmátrix. Azaz, az A mátrix minden elemének helyére beírjuk a hozzá tartozó részmátrix determinánsát, megszorozzuk a sakktáblaszabály szerinti előjellel, majd az így kapott mátrixot transzponáljuk (tükrözzük a főátlóra).

A Ferde Kifejtési Tételből (ld. pl. [S] 55. old. 6. állítás) levezethető az alábbi tétel:

TÉTEL: Ha $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és $\det(A) \neq 0$, akkor $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} \cdot \mathrm{adj}(A)$.

(Nem bizonyítjuk!) □

NB: Az elnevezésnél a "klasszikus" jelzőt a funkcionál-analízisben használatos alábbi adjungált-fogalomtól való megkülönböztetés miatt hangsúlyozzuk. [S] -ben csak a klasszikus fogalma használatos.

DEFINÍCIÓ: Ha $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ (azaz A elemei komplex számok), akkor $A^* \in \mathbb{C}^{n\times m}$ jelöli az A mátrix Hermite-típusú adjungáltját: $A^* = \overline{A^T}$, azaz A transzponáltjában minden elemnek vesszük a (komplex) konjugáltját. □

Multilineáris leképezések

(Ld. [F], II.7. fejezet, 228-233. oldalak)

Az alábbiakban mélyebben megvizsgáljuk a determinánsok fogalmát és tulajdonságait.

DEFINÍCIÓ: Legyenek $V \subseteq \mathbb{R}^m$, $W \subseteq \mathbb{R}^k$ tetszőleges alterek. Egy n-változós

$$f : V^n \to W$$

függvényt ($V^n = V \times V \times \ldots \times V$ az n-tényezős Descartes-szorzat) <u>multilineáris (vagy n-lineáris) leképezésnek</u> nevezünk, ha tetszőleges $i \le n$ index esetén a függvény az i-edik változójában lineáris (ha az összes többi változóját rögzitettük).

Részletesebben : Rögzitsünk az $i \le n$ (tetszőleges) indexet, és a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_{i-1}, \underline{v}_{i+1}, \ldots, \underline{v}_n \in V$ vektorokat. Ekkor tetszőleges $\underline{u}, \underline{v} \in V$ vektorok és $\lambda \in \mathbb{R}$ skalár esetén teljesüljön az alábbi (1) és (2) :

$$(1)\quad f(\underline{v}_1, \ldots, \underset{\substack{\uparrow \\ i\text{-edik hely}}}{\underline{u}+\underline{v}}, \ldots, \underline{v}_n) = f(\underline{v}_1, \ldots, \underline{u}, \ldots, \underline{v}_n) + f(\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}, \ldots, \underline{v}_n)$$

$$(2)\quad f(\underline{v}_1, \ldots, \lambda\underline{u}, \ldots, \underline{v}_n) = \lambda \cdot f(\underline{v}_1, \ldots, \underline{u}, \ldots, \underline{v}_n) \qquad \square$$

DEFINÍCIÓ: Legyen V tetszőleges altér. Egy n-változós $f : V^n \to \mathbb{R}$ függvényt <u>alternáló</u> -nak hívunk, ha tetszőleges két változóját felcserélve a függvény előjelet vált. Képletben: tetszőleges $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n \in V$ vektorokra és $i, j \le n$, $i \ne j$ indexekre

$$(3)\quad f(\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_i, \ldots, \underline{v}_j, \ldots, \underline{v}_n) = (-1) \cdot f(\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_j, \ldots, \underline{v}_i, \ldots, \underline{v}_n) \qquad \square$$

<u>PÉLDA</u> alternáló multilineáris leképezésre:

Legyen $E = \{\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n\} \subseteq V$ a V altér egy <u>rögzitett</u> bázisa. Tetszőleges $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n \in V$ vektorokra tekintsük a vektorok koordinátáiból, mint oszlopvektorokból álló $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ négyzetes mátrixot

(azaz ha $\underline{v}_j = \sum_{i \le n} a_{ij} \cdot \underline{e}_i$ $(j \le n)$ akkor $[A]_{ij} := a_{ij}$) .

Ekkor legyen

$$\mathcal{F}(\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_n) := \det(A)$$

A determináns tulajdonságaiból (oszlopok felcserélése, illetve rögzített oszlopára teljesülő linearitás miatt) könnyen belátható, hogy $\mathcal{F}$ valóban alternáló multilineáris leképezés. □

NB: Később belátjuk, hogy $\mathcal{F}$ nem függ a bázistól.

ÁLLÍTÁS. Ha $\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_n \in V$ lineárisan összefüggő vektorok, $f: V^n \to \mathbb{R}$ tetszőleges alternáló multilineáris leképezés, akkor $f(\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_n) = 0$. □

ÁLLÍTÁS. Az alternáló multilineáris leképezések teljesítik az Alaptétel -beli I-VIII tulajdonságokat, a szokásos "pontonkénti" műveletekkel (rögzített V tér esetén). □

NB: Eddig V és n (változók száma) tetszőlegesek voltak, még azt sem használtuk ki, hogy $\mathrm{Im}(f) \subseteq \mathbb{R}$. Az alábbi Tételek és Állítások is igazak általánosabban, most azonban csak a $\dim(V)=n$ és $\mathrm{Im}(f) \subseteq \mathbb{R}$ speciális esetben fogalmazzuk meg őket.

TÉTEL. Legyen V tetszőleges altér, $\dim(V)=n$ és $\mathrm{Im}(f) \subseteq \mathbb{R}$.
Ekkor minden $f: V^n \to \mathbb{R}$ alternáló multilineáris leképezés a példabeli $\mathcal{F}$ leképezés (valamilyen valós) számszorosa. □

ÁLLÍTÁS. Ha $\mathcal{A}: V \to V$ lineáris leképezés és $f: V^n \to \mathbb{R}$ alternáló multilineáris leképezés, akkor az alábbi leképezés

$$f_{\mathcal{A}}: V^n \to \mathbb{R} \quad , \quad (\underline{v}_1,\underline{v}_2,\ldots,\underline{v}_n) \mapsto f(\mathcal{A}\underline{v}_1,\mathcal{A}\underline{v}_2,\ldots,\mathcal{A}\underline{v}_n)$$

is alternáló multilineáris leképezés. □

NB: Vagyis $\mathcal{F}$ is alternáló multilineáris leképezés. □

TÉTEL. Minden $\mathcal{A}: V \to V$ lineáris transzformációhoz létezik egy olyan egyértelműen meghatározott $|\mathcal{A}| \in \mathbb{R}$ szám, amelyre tetszőleges $\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_n \in V$ vektorrendszer esetén

$$\mathcal{F}_{\mathcal{A}}(\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_n) = |\mathcal{A}| \cdot \mathcal{F}(\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_n) \qquad \square$$

DEFINÍCIÓ: A fenti Tételben említett $|\mathcal{A}| \in \mathbb{R}$ számot az $\mathcal{A}$ lineáris leképezés determinánsának nevezzük.

TÉTEL. $|\mathcal{A} \circ \mathcal{B}| = |\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}|$ tetszőleges $\mathcal{A}, \mathcal{B} : V \to V$ lineáris leképezésekre. $\square$

KÖV.: $|\mathcal{A}| = \det(A)$, ha $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ az $\mathcal{A}: V \to V$ lineáris leképezés mátrixa, ráadásul bármilyen bázisban. $\square$