http://math.uni-pannon.hu/~szalkai/**Laplace-tabl+.pdf** , /2011.06.28./

dr.Szalkai István, Pannon Egyetem, SZALKAI@ALMOS.UNI-PANNON.HU

A Laplace - transzformált

I. Definíció: $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ esetén $\mathcal{L}(f(t)) := F(s)$ a következő függvény:

$F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ és $F(s) := \int\limits_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\ dt$. □

Tétel (Megfordítási képlet): A fentiek esetén

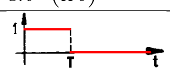
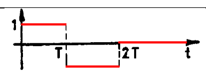
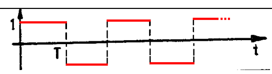
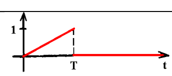
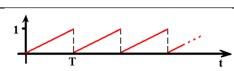
$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s)) = \int\limits_{x_0-\infty}^{x_0+\infty} e^{st} F(s)\ ds$ ahol $x_0 \in Dom(F)$. □

Műveleti szabályok:

	$f(t)$	$F(s)$
I. /def/	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s))$	$F(s) = \mathcal{L}(f(t))$
II.	$\frac{df}{dt} = f'(t)$	$s \cdot F(s) - f(0+)$
III.	$\frac{d^n f}{dt^n} = f^{(n)}(t) \quad (n \in \mathbb{N})$	$s^n \cdot F(s) - s^{n-1} \cdot f(0+) - ... - f^{(n-1)}(0+)$
IV.	$t \cdot f(t)$	$-\frac{dF}{ds} = -F'(s)$
V.	$t^n \cdot f(t) \quad (n \in \mathbb{N})$	$(-1)^n \cdot \frac{d^n F}{ds^n} = (-1)^n \cdot F^{(n)}(s)$
VI.	$\int_0^t f(x)\ dx$	$\frac{1}{s} F(s)$
VII.	$f(bt) \quad (0 < b)$	$\frac{1}{b} F\left(\frac{s}{b}\right)$
VIII.	$e^{at} \cdot f(t)$	$F(s-a)$
IX.	$\begin{cases} 0 & \text{ha } 0 \le t < b \\ f(t-b) & \text{ha } b \le t \end{cases}$	$e^{-sb} F(s)$
X.	$f(t)$ periodikus T szerint	$\frac{1}{1-e^{-Ts}} \int_0^T e^{-st} f(t)\ dt$
XI.	$f(t) * g(t)$ (konvolúció)	$F(s) \cdot G(s)$
XII.	$\delta(t-t_0) \cdot f(t)$	$e^{-st_0} \cdot f(t_0)$

Néhány függvény transzformáltja:

	$f(t)$	$F(s)$
1.	1	$\frac{1}{s}$
2.	$t^n \quad (n \in \mathbb{N})$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
3.	$\sqrt{t}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{s^3}}$
4.	$\frac{1}{\sqrt{t}}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}}$
5.	$t^p \quad (-1 < p \in \mathbb{R})$	$\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}$
6.	e^{at} , $\quad b^t \ (=e^{\ln(b) \cdot t})$	$\frac{1}{s-a}$, $\quad \frac{1}{s - \ln(b)}$
7.	$\frac{1}{\sqrt{t}} \cdot e^{-\frac{T}{t}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{s}} \cdot e^{-2\sqrt{sT}}$
8.	$\frac{1}{\sqrt{t^3}} \cdot e^{-\frac{T}{t}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{T}} \cdot e^{-2\sqrt{sT}}$
9.	$\frac{1-e^{-t}}{t}$	$\ln\left(1 + \frac{1}{s}\right)$
10.	$\operatorname{erf}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{T}{t}}\right)$	$\frac{1}{s} \cdot \left(1 - e^{-\sqrt{sT}}\right)$
11.	$\delta(t)$	1
12.	$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
13.	$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
14.	$t \cdot \sin(\omega t)$	$\frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}$
15.	$t \cdot \cos(\omega t)$	$\frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$
16.	$\frac{\sin(\omega t)}{t}$	$arctg\left(\frac{\omega}{s}\right)$
17.	$\frac{\cos(\omega t)}{t}$	
18.	$\sin^2(\omega t)$	$\frac{2\omega^2}{s(s^2 + 4\omega^2)}$
19.	$\cos^2(\omega t)$	$\frac{s^2 + 2\omega^2}{s(s^2 + 4\omega^2)}$
20.	$\sin^3(\omega t)$	$\frac{6\omega^3}{(s^2 + \omega^2)(s^2 + 9\omega^2)}$
21.	$\cos^3(\omega t)$	$\frac{(s^3 + 7s\omega^2)}{(s^2 + \omega^2)(s^2 + 9\omega^2)}$

	$f(t)$	$F(s)$
22.	$sh\,(\omega t)$	$\dfrac{\omega}{s^2-\omega^2}$
23.	$ch\,(\omega t)$	$\dfrac{s}{s^2-\omega^2}$
24.	$t \cdot sh\,(\omega t)$	$\dfrac{2\omega s}{\left(\omega^2-s^2\right)^2}$
25.	$t \cdot ch\,(\omega t)$	$\dfrac{s^2+\omega^2}{\left(s^2-\omega^2\right)^2}$
26.	$\dfrac{sh\,(\omega t)}{t}$	$\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{s+\omega}{s-\omega}\right)$
27.	$\dfrac{ch\,(\omega t)}{t}$	
28.	$sh^2\,(\omega t)$	$\dfrac{2\omega^2}{s\left(s^2-4\omega^2\right)}$
29.	$ch^2\,(\omega t)$	
30.		$\dfrac{1-e^{-Ts}}{s}$
31.		$\dfrac{\left(1-e^{-Ts}\right)^2}{s}$
32.		$\dfrac{1}{s}th\left(\dfrac{Ts}{2}\right)$
33.		$\dfrac{Ts+1-e^{-Ts}}{Ts^2}$
34.		$\dfrac{1-(1+Ts)\,e^{-Ts}}{Ts^2\left(1-e^{Ts}\right)}$

Parciális törtek *inverz* transzformáltjai:

	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(F_{(s)}\right)$	$F(s) = \dfrac{P(s)}{Q(s)}$
o)	$\delta(t)$	1
a)	$1\ , \quad e^{at}$	$\dfrac{1}{s}\ , \quad \dfrac{1}{s-a}$
b)	$\dfrac{1}{(k-1)!}t^{k-1}\ , \quad \dfrac{1}{(k-1)!}t^{k-1}e^{at}$	$\dfrac{1}{s^k}\ , \quad \dfrac{1}{(s-a)^k}$
c)	$e^{-ut}\cdot\dfrac{1}{v}\sin(vt)$	$\dfrac{1}{(s+u)^2+v^2}$
d)	$e^{-ut}\cdot\left(\cos(vt)-\dfrac{u}{v}\sin(vt)\right)$	$\dfrac{s}{(s+u)^2+v^2}$
e)	$e^{-ut}\cdot\dfrac{1}{2v^3}\left(\sin(vt)-tv\cos(vt)\right)$	$\dfrac{1}{\left((s+u)^2+v^2\right)^2}$
f)	$\dfrac{1}{2v}t\sin(vt)$	$\dfrac{s}{(s^2+v^2)^2}$
g)	$\dfrac{1}{2v^3}e^{-ut}\left(\left(tv^2-u\right)\sin(tv)+tuv\cos(tv)\right)$	$\dfrac{s}{\left((s+u)^2+v^2\right)^2}$
h)	$\dfrac{1}{2v}\left(\sin(tv)+tv\cos(tv)\right)$	$\dfrac{s^2}{(s^2+v^2)^2}$
i)	$\frac{1}{2v^3}e^{-tu}\left(\left(u^2+v^2-2tuv^2\right)\cdot\sin(tv)+tv\left(v^2-u^2\right)\cdot\cos(tv)\right)$	$\dfrac{s^2}{\left((s+u)^2+v^2\right)^2}$