

Komplex számok

Gróf: Matematika I. 26-31. és 184-187. oldal

\mathbf{R}^2 téren

- összeadás $(a;b) + (c;d) = (a+c; b+d)$
- szorzás $(a;b) \cdot (c;d) = (ac-bd; cb+ad)$

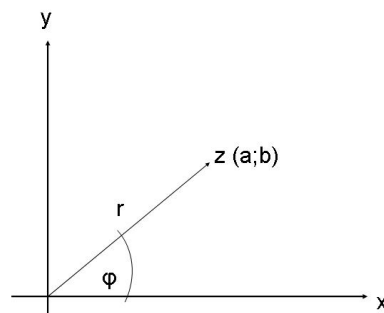
$(\mathbf{R}^2; +; \cdot)$ halmaz (tér) neve: komplex számok, jele: \mathbf{C}

- képzetes egység: i
- kanonikus alak: $a + bi$
- $\operatorname{Re} z$ (valós rész), $\operatorname{Im} z$ (képzetes rész)
- műveletek kanonikus alakban

$$(a + bi) + (c + di) = (a+c) + (b+d)i$$

$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac-bd) + (ad+cb)i$$

- komplex számok egyenlősége
- abszolútértéke $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
- $z = a+bi$ komplex szám konjugáltja: $\bar{z} = a-bi$
- ábrázolás a síkon



- trigonometrikus alak: $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$

$$a = r \cos \varphi \text{ és } b = r \sin \varphi$$

- exponenciális alak: $z = re^{i\varphi}$
- műveletek trigonometrikus alakban

$$z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \text{ és } z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + k \frac{2\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\varphi}{n} + k \frac{2\pi}{n}\right) \right) \quad k=0;1;\dots;(n-1) \text{ (ez } n \text{ db szám!)}$$

$$z^{-n} = \frac{1}{z^n}$$

- Euler-formula: $z \in \mathbf{C}$

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z$$

Feladatok:

Írja fel az alábbi komplex számokat kanonikus alakban!

$$\frac{-5 + 2i}{2}$$

$$\frac{3 + 4i}{i}$$

$$\frac{-1 + 2i}{2 - 3i}$$

$$\frac{-5 + 2i}{-4 - 7i}$$

$$\frac{-7 - 2i}{2 - 8i}$$

$$\frac{2i}{2 - i}$$

Megválasztható-e b úgy, hogy $\frac{b+i}{1-2i}$ komplex számra teljesüljön, hogy

a) $\operatorname{Re} z = 0$

b) $\operatorname{Im} z = 0$

Végezze el az alábbi műveleteket!

$$z_1 = 2 + 3i$$

$$z_2 = 5 + 4i$$

$$z_1 + z_2$$

$$z_1 \cdot z_2$$

$$\frac{z_1}{z_2}$$

$$\operatorname{Re} z_1 + z_2$$

$$\operatorname{Im} \frac{z_1}{z_2}$$

Írja fel trigonometrikus alakban az alábbi komplex számot!

$$2+2i$$

$$-i$$

Végezze el az alábbi műveleteket!

a) i^3

b) \sqrt{i}

c) $\sqrt{-5}$

d) $(1+i)^{10}$

Milyen $z \in \mathbf{C}$ esetén lesz a $\frac{z+3}{z+5}$ valós szám?

Oldja meg az alábbi egyenleteket \mathbf{C} -ben!

$$\frac{1}{z+i} = -4z$$

$$z^2 = 5 + 12i$$

$$|z| \cdot z = 4 + 3i$$

$$|z| - z = 1 + 2i$$

$$(z^4 + 1)(z^3 + i) = 0$$