Többváltozós függvények

Bevezető

dr. Szalkai István

Pannon Egyetem, Veszprém

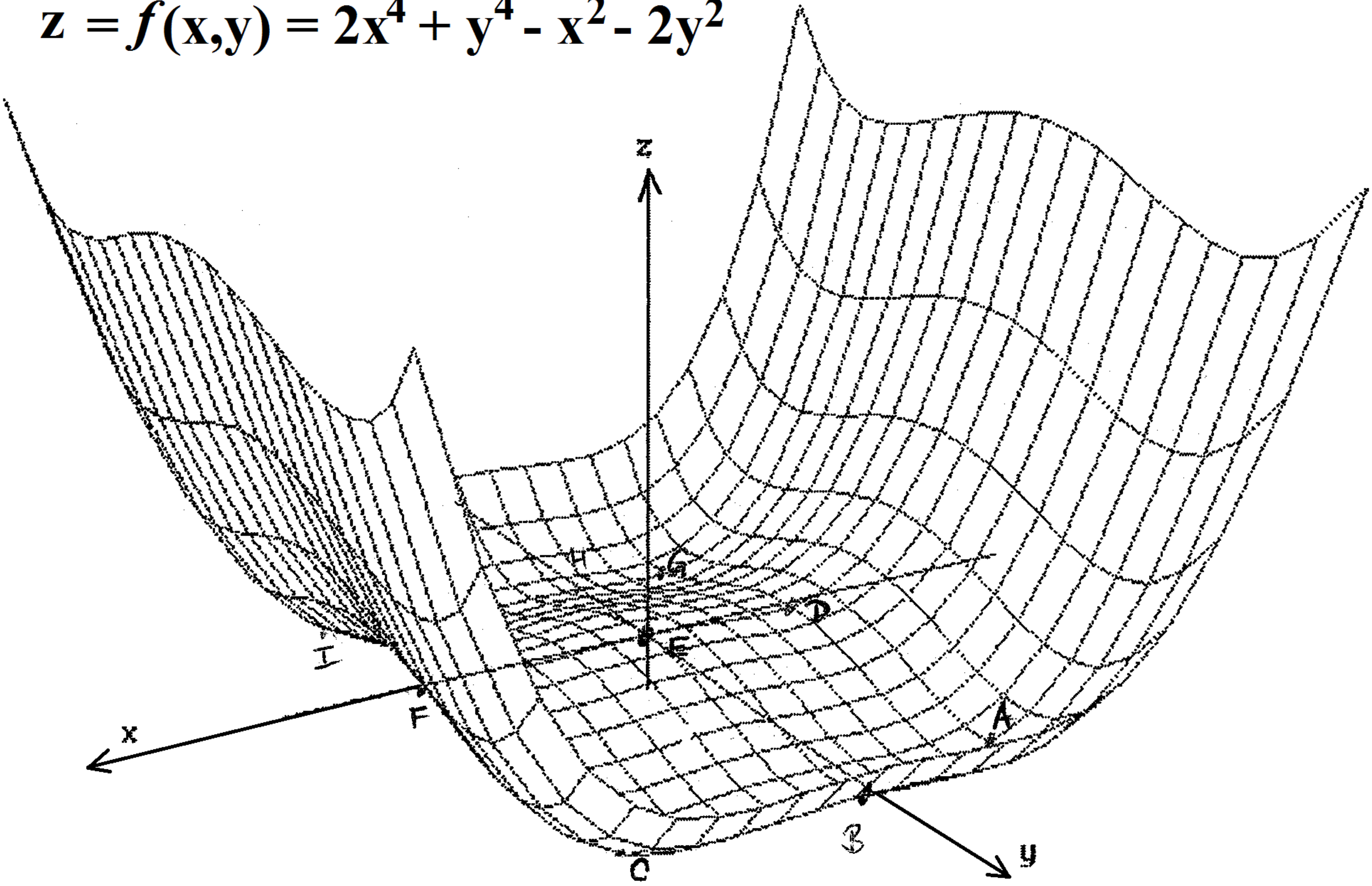
szalkai@almos.uni-pannon.hu

$z = f\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $n=2$ esetén: $z = f\,(x, y)$

0. Példa: $z = f\,(x,y) = 2 \cdot x^4 + y^4 - x^2 - 2 \cdot y^2$

Ábrázolása: $n=2$ esetén 3-dimenziós felület:

$$z = f(x,y) = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$$



Parciális deriváltak:

1. Definíció:

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x}(x_0, y_0) \coloneqq \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial y}(x_0, y_0) \coloneqq \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}$$

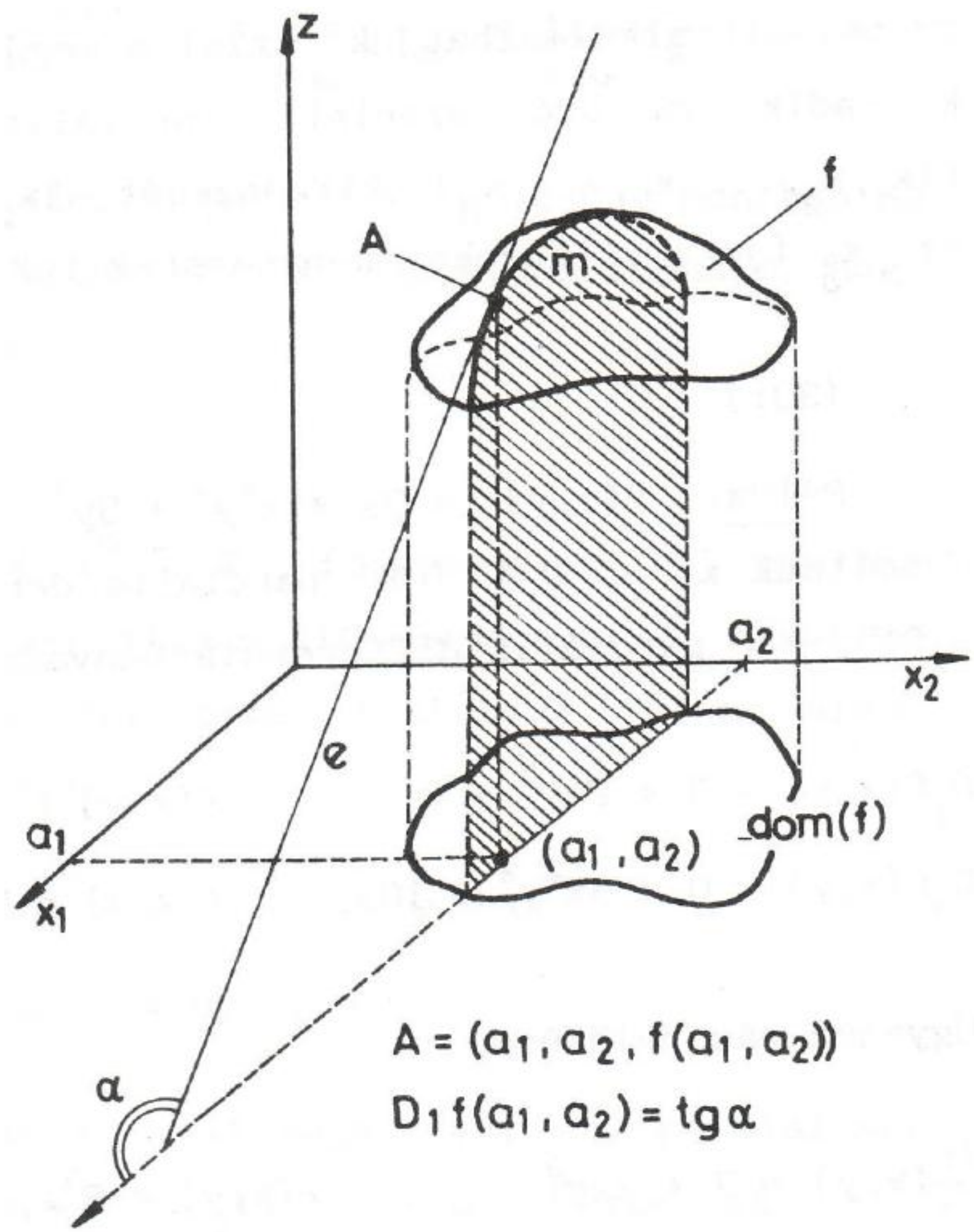
$\Delta \nabla$

Más jelölések:

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x} = \mathrm{D}_x f = \mathrm{D}_1 f = f_x' = f_1' = \ldots$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial y} = \mathrm{D}_y f = \mathrm{D}_2 f = f_y' = f_2' = \ldots$$

Geometriai jelentés:



Gyakorlatban:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \text{" } x \text{ szerint deriválok, } y \text{ konstans ",}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \text{" } y \text{ szerint deriválok, } x \text{ konstans ",}$$

2. Példa: $f(x,y) = 3x^4y^5+7x^2y^6$, $(x_0, y_0) = (2,3)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(3\cdot x^4\cdot y^5+7\cdot x^2\cdot y^6) = 3\cdot 4\cdot x^{4-1}\cdot y^5+7\cdot 2\cdot x^{2-1}\cdot y^6 ,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} f(x_0, y_0) = 3\cdot 4\cdot 2^{4-1}\cdot 3^5+7\cdot 2\cdot 2^{2-1}\cdot 3^6 = 43\,740 ,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(3\cdot x^4\cdot y^5+7\cdot x^2\cdot y^6) = 3\cdot x^4\cdot 5\cdot y^{5-1}+7\cdot x^2\cdot 6\cdot y^{6-1} ,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} f(x_0, y_0) = 3\cdot 2^4\cdot 5\cdot 3^{5-1}+7\cdot 2^2\cdot 6\cdot 3^{6-1} = 60\,264 .$$

Lokális szélsőértékhelyek

3. Tétel: Ha f -nek a P(x_0 ,y_0) pontban lokális szélsőértéke van, akkor

$$\frac{\partial f}{\partial x} f(x_0 ,y_0) = 0 \quad \text{és} \quad \frac{\partial f}{\partial y} f(x_0 ,y_0) = 0 \qquad (2)$$

/szükséges feltétel, egyenletrendszer/. Δ∇

4. Definíció: A (2) egyenletrendszert kielégítő P(x_0 ,y_0) pontokat **stacionárius** /"álló"/ pontoknak nevezzük /az érintősík vízszintes/. Δ∇

5. Példa: $f\,(x,y) = 2\cdot x^4+y^4-x^2-2\cdot y^2$ /lásd 0.Példa/

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2x^4+y^4-x^2-2y^2) = 2\cdot 4\cdot x^3 + 0 - 2\cdot x - 0 = 8x^3-2x = 0 \,,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(2x^4+y^4-x^2-2y^2) = 0 + 4\cdot y^3 - 0 - 2\cdot 2\cdot y = 4y^3-4y = 0 \,,$$

/ folytatás => /

A $\begin{Bmatrix} 8x^3 - 2x = 0 \\ 4y^3 - 4y = 0 \end{Bmatrix}$

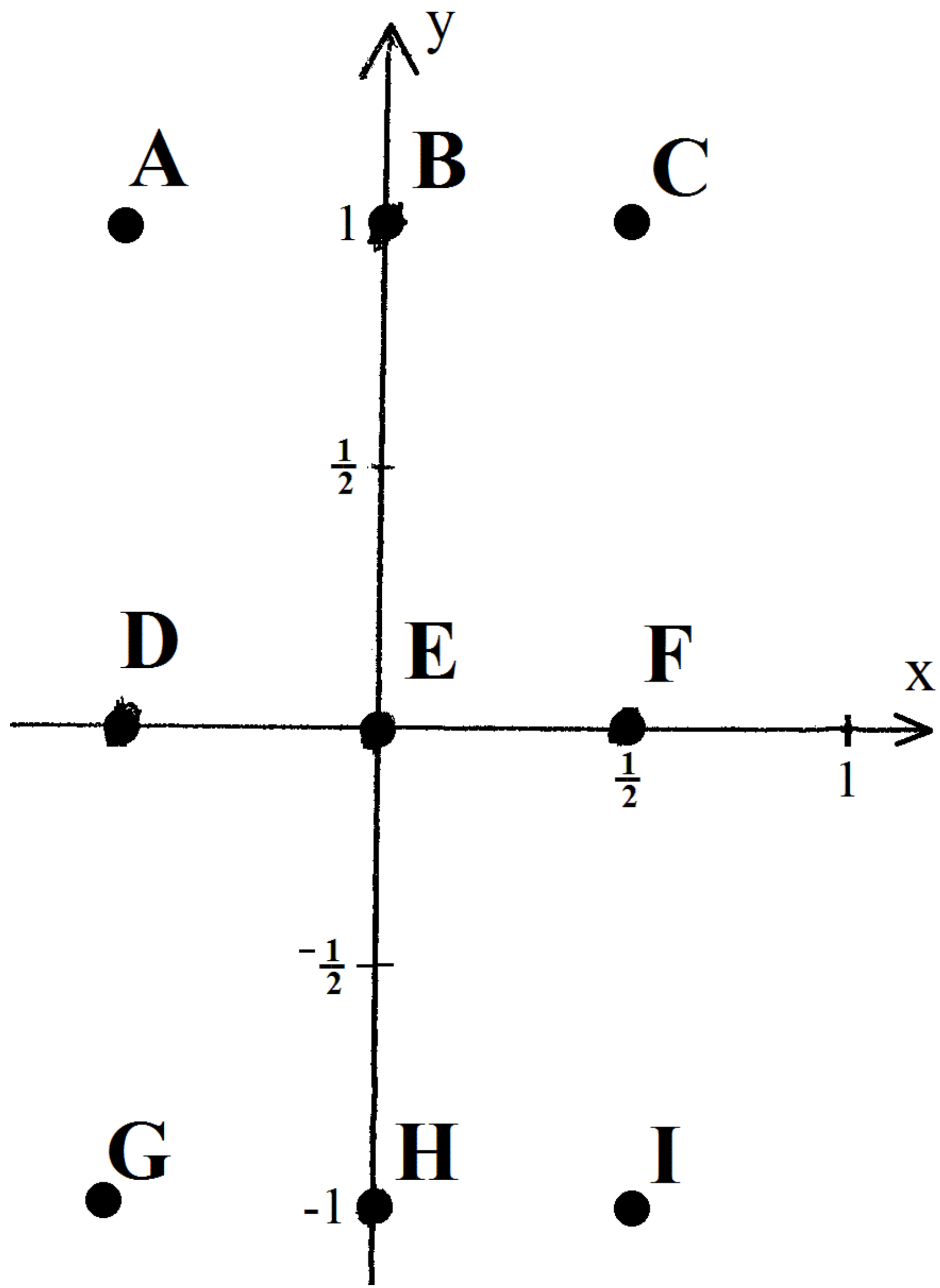
egyenletrendszer megoldása:

A($-^1/_2$, 1), B(0, 1), C($^1/_2$, 1),

D($-^1/_2$, 0), E(0, 0), F($^1/_2$, 0),

G($-^1/_2$,-1), H(0,-1), I($^1/_2$,-1).

Lokális szélsőérték csak ezeken a helyeken lehetséges, de melyikben van ténylegesen /elégséges feltétel/ ?



6. Definíció: Másodrendű deriváltak:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} f(x_0, y_0) := \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x} f(x_0, y_0) \right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} f(x_0, y_0) := \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y} f(x_0, y_0) \right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} f(x_0, y_0) := \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y} f(x_0, y_0) \right)$$ /"vegyes derivált"/ Δ∇

7. Tétel (Schwarz-Young-...): $\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y} f(x_0, y_0)\right) = \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x} f(x_0, y_0)\right)$ Δ∇

8. Definíció (Jacobi mátrix determinánsa):

$$\Delta f(x_0, y_0) := \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} f(x_0, y_0)\right) * \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} f(x_0, y_0)\right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} f(x_0, y_0)\right)^2$$ ΔV

9. Tétel: Ha a P(x_0, y_0) pont stacionárius pont, akkor

$\Delta f(x_0, y_0) < 0$ esetén az f függvénynek nincs lokális szélsőértéke P -ben,

/"nyeregpont"/

$\Delta f(x_0, y_0) = 0$ esetén további vizsgálat szükséges,

$\Delta f(x_0, y_0) > 0$ esetén az f függvénynek lokális szélsőértéke van P -ben,

mégpedig:

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} f(x_0, y_0) > 0$ esetén lokális minimuma,

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} f(x_0, y_0) < 0$ esetén lokális maximuma.

/szükséges feltétel/. $\Delta\nabla$

Az 5.Példa folytatása: / $f(x,y) = 2x^4+y^4-x^2-2y^2$ /

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2x^4+y^4-x^2-2y^2) = \frac{\partial f}{\partial x}(8x^3-2x) = 8\cdot 3\cdot x^2 - 2 = 24x^2 - 2 ,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2x^4+y^4-x^2-2y^2) = \frac{\partial f}{\partial y}(4y^3-4y) = 4\cdot 3\cdot y^2 - 4 = 12y^2 - 4 ,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(2x^4+y^4-x^2-2y^2) = \frac{\partial f}{\partial y}(8x^3-2x) = \mathbf{0} = \frac{\partial f}{\partial x}(4y^3-4y) ,$$

tehát

$$\Delta f(x,y) = \mathbf{(}24x^2 - 2\mathbf{)}*\mathbf{(}12y^2 - 4\mathbf{)} - 0^2 .$$

$\Delta f(\mathrm{A}) = \Delta f(-{}^1/_2, 1) = \mathbf{(}24\cdot({}^{-1}/_2)^2 - 2\mathbf{)}*\mathbf{(}12\cdot 1^2 - 4\mathbf{)} = 32 > 0$ **=>** van szélsőérték,

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} f(\mathrm{A}) = 4 > 0$ **=>** lokális minimum van,

$\Delta f(\mathrm{B}) = \Delta f(0,1) = \mathbf{(}24\cdot 0^2 - 2\mathbf{)}*\mathbf{(}12\cdot 1^2 - 4\mathbf{)} = -16 < 0$ **=>** nincs szélsőérték,

Δf (C) = Δf ($^1/_2$,1) = **(**24·($^1/_2$)^2 -2**)*(**12·1^2 -4**)** = 32 > 0 **=>** van szélsőérték,

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} f$(C) = 4 > 0 **=>** lokális minimum van,

Δf (D) = Δf ($^{-1}/_2$,0) = **(**24·($^{-1}/_2$)^2 -2**)*(**12·0^2 -4**)** = -16 < 0 **=>** nincs szélsőérték,

Δf (E) = Δf (0,0) = **(**24·0^2 -2**)*(**12·0^2 -4**)** = 8 > 0 **=>** van szélsőérték,

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} f$(E) = -2 < 0 **=>** lokális maximum van,

Δf (F) = Δf ($^1/_2$,0) = **(**24·($^1/_2$)^2 -2**)*(**12·0^2 -4**)** = -16 < 0 **=>** nincs szélsőérték,

Δf (G) = Δf ($^{-1}/_2$,-1) = **(**24·($^{-1}/_2$)^2 -2**)*(**12·(-1)^2 -4**)** = 32 > 0

=> van szélsőérték,

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} f$(G) = 4 > 0 **=>** lokális minimum van,

Δf (H) = Δf (0,-1) = **(**24·0^2 -2**)*(**12·(-1)^2 -4**)** = -16 < 0 **=>** nincs szélsőérték,

$\boldsymbol{\Delta} f\,(\mathrm{I}) = \boldsymbol{\Delta} f\,({}^{1}/_{2}\,,-1) = \mathbf{(}24\cdot({}^{1}/_{2})^{2} -2\mathbf{)}*\mathbf{(}12\cdot(-1)^{2} -4\mathbf{)} = 32 > 0$ **=>** van szélsőérték,

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} f(\mathrm{I}) = 4 > 0$ **=>** lokális minimum van. $\Delta\nabla$

10. Házi feladat: Számítsuk ki a 2.Példában szereplő $f(x,y)$ függvényre a

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} f(x,y)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} f(x,y)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} f(x,y)$ és $\boldsymbol{\Delta} f\,(x,y)$ deriváltakat!