filename: BA-kieg.tex, '15.12.09., 21:45'

Példák Boole-Algebra jelöltekre (struktúrák)

Boole-algebrák axiómái

$$\mathfrak{B} = (\mathrm{X}\,, \cup, \cap, \overline{\ }\,, \emptyset\,, I\,)$$

kommutativitás	$A \cup B = B \cup A$	(BA1)
	$A \cap B = B \cap A$	(BA2)
asszociativitás	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	(BA3)
	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	(BA4)
disztributivitás	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	(BA5)
	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	(BA6)
elnyelési tulajdonságok	$A \cup (A \cap B) = A$	(BA7)
	$A \cap (A \cup B) = A$	(BA8)
$\emptyset$ és I tulajdonságai	$A \cup \overline{A} = I$	(BA9)
	$A \cap \overline{A} = \emptyset$	(BA10)
	$A \cup \emptyset = A$	(BA11)
	$A \cap \emptyset = \emptyset$	(BA12)
	$A \cup I = I$	(BA13)
	$A \cap I = A$	(BA14)

—

A fentiekből levezethető (következik) **De Morgan:**

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \quad \text{és} \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}\ . \tag{1}$$

1 Halmazalgebra

A jólismert *únió, metszet, komplementer, üres-* és *alaphalmaz* teljesíti a fenti $(BA1) - (BA14)$ axiómákat és a (1) egyenlőséget. Ez esetben $X = \mathcal{P}(I)$ (hatványhalmaz).

2 Számelmélet

Legyen $N \in \mathbb{N}$ egy tetszőleges, de rögzített **négyzetmentes** természetes szám (nincs olyan $x \in \mathbb{N}$ amelyre x^2 -tel osztható lenne N) esetén

$$\mathcal{D} := (D_N, Lkkt, Lnko, \overline{}, 1, N)$$

vagy újabb jelölésekkel:

$$\mathcal{D} := (D_N, \bigtriangledown, \bigtriangleup, \overline{}, 1, N)$$

ahol

$$D_N := \{a \in \mathbb{N} : a \mid N\}$$

azaz N osztóinak (*divisors*) halmaza,

$$a \bigtriangledown b = Lkkt\,(a, b) \ , \quad a \bigtriangleup b = Lnko\,(a, b) \ ,$$

és $a \in D_N$ esetén legyen

$$\overline{a} := \frac{N}{a} \ .$$

Könnyen belátható, hogy $a \in D_N$ (vagyis $a \mid N$) esetén szintén $\overline{a} \in D_N$ (vagyis $\overline{a} \mid N$), sőt $a \cdot \overline{a} = N$, vagyis $\overline{a}$ valóban az a osztó *kiegészítő* (=komplementer) osztópárja.

Például $N = 60$ *nem* jó (mert $2^2 \mid 60$), de $N = 210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ jó, ekkor D_{210} -et Házi Feladat felírni.

Most írjuk át a $(BA1) - (BA14)$ axiómákat az $Lnko$, $Lkkt$, ... jelekre. Tehát: $a \cup b = a \bigtriangledown b = Lkkt\,(a, b)$, $a \cap b = a \bigtriangleup b = Lnko\,(a, b)$, $\overline{a} = \frac{N}{a}$, $\emptyset = 1$, $I = N$, és ne feledjük: $a \mid N$:

$(Sz1) \quad Lkkt\,(a,b) = Lkkt\,(b,a)$,

$(Sz2) \quad Lnko\,(a,b) = Lnko\,(b,a)$,

$(Sz3) \quad Lkkt\,(a, Lkkt\,(b,c)) = Lkkt\,(Lkkt\,(a,b)\,, c)$,

$(Sz4) \quad Lnko\,(a, Lnko\,(b,c)) = Lnko\,(Lnko\,(a,b)\,, c)$,

$(Sz5) \quad Lkkt\,(a, Lnko\,(b,c)) = Lnko\,(Lkkt\,(a,b)\,, Lkkt\,(a,c))$

$(Sz6) \quad Lnko\,(a, Lkkt\,(b,c)) = Lkkt\,(Lnko\,(a,b)\,, Lnko\,(a,c))$

$(Sz7) \quad Lkkt\,(a, Lnko\,(a,b)) = a$,

$(Sz8) \quad Lnko\,(a, Lkkt\,(a,b)) = a$,

$(Sz9) \quad Lkkt\left(a, \frac{N}{a}\right) = N$,

$(Sz10) \quad Lnko\left(a, \frac{N}{a}\right) = 1$,

$(Sz11) \quad Lkkt\,(a,1) = a$,

$(Sz12) \quad Lnko\,(a,1) = 1$,

$(Sz13) \quad Lkkt\,(a,N) = N$,

$(Sz14) \quad Lnko\,(a,N) = N$,

$(Sz14)$ **De Morgan:** $\frac{N}{Lkkt(a,b)} = Lnko\left(\frac{N}{a}, \frac{N}{b}\right)$, $\frac{N}{Lnko(a,b)} = Lkkt\left(\frac{N}{a}, \frac{N}{b}\right)$.

Megjegyzés: A szokatlan az, hogy az $\cup$ és $\cap$ jelek a halmazok *között* vannak (ezt **infix** jelölésnek hívják), míg az $Lkkt$ és $Lnko$ jelek a számok *előtt* vannak (**prefix** jelölés). Próbáljuk ki a következő, új jelöléseket: legyen

$$a \bigtriangledown b := Lkkt\,(a,b) \quad \text{és} \quad a \bigtriangleup b := Lnko\,(a,b) \quad \text{és} \quad \overset{=}{a} := \frac{N}{a} . \qquad (2)$$

Házi feladat a $(Sz1)-(Sz15)$ egyenlőségeket átírni a (2)-ben szereplő új jelekre (amik már még jobban hasonlítanak a $(BA1)-(BA14)$ és (1) egyenlőségekhez.

3 Valószínűségszámítás

Legyen

$$\mathcal{V} := (V_\Omega, +, \cdot, \overline{}, \emptyset, \Omega)$$

az Ω *eseménytér* $V_\Omega = \mathcal{P}(\Omega)$ eseményeinek halmaza, az *események összege, szorzata és tagadása* műveletekkel $(+, \cdot, \overline{})$ és a *lehetetlen és biztos* eseményekkel $(\emptyset, \Omega)$.

A $(BA1) - (BA14)$ axiómák, és így a (1) egyenlőség is mind teljesül.

4 Logika

Legyen

$$\mathcal{L} := (H, \vee, \wedge, \overline{}, h, i)$$

a logikai $H = \{i, h\}$ igazsághalmazon értelmezett (matematikai logikai) *vagy, és* valamint a *tagadás* műveletek $(\vee, \wedge, \overline{})$,. továbbá a konstans (állandó) *hamis* és *igaz* állításokkal.

A $(BA1) - (BA14)$ axiómák, és így a (1) egyenlőség is mind teljesül.

Hasonlóak a **csap-** és **kapcsolóalgebrák**.

5 min és max

Legyen $K \in \mathbb{R}^+$ egy tetszőleges, de rögzített pozitív valós szám, és ekkor legyen

$$\mathcal{M}_K := ([-K, K], \max, \min, -, -K, +K)$$

ahol $[-K, K]$ az origóra szimmetrikus, K sugarú zárt intervallum, $-x$ a szám ellentettje (szorzás -1 -gyel), a többi jel közismert.

$\mathcal{M}$ sajnos csak majdnem Boole algebra, de Házi Feladat megkeresni, hogy mely axiómák teljesülnek (a legtöbb) és melyek nem (csak $(BA9)$ és $(BA10)$), sőt a (1) De Morgan egyenlőségek is teljesülnek.

Hasonló a

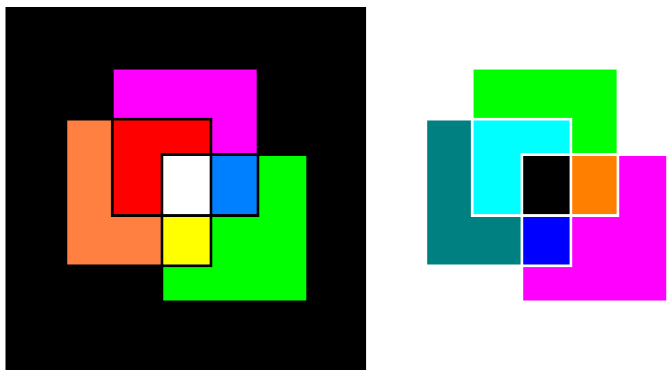
$$\overline{\mathcal{M}} := \left(\overline{\mathbb{R}}, \max, \min, -, -\infty, +\infty\right)$$

struktúra is, ahol $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

6 Színkeverés

$$\mathcal{S} := (S, \bigtriangledown, \bigtriangleup, \text{---}, f, F)$$

ahol az alaphalmaz: $S := \{színek\}$, $\bigtriangledown$ az additív- (összeadó-), $\bigtriangleup$ a szubtraktív- (kivonó-) színkeverés, — a komplementer (kiegészítő) szín, $f = fehér$ (összes szín keveréke), $F = Fekete$ (nincs szín).



7 Alapműveletek

Legyen

$$\mathcal{R} := (\mathbb{R}, +, \cdot, -, 0, 1)$$

a valós számok *összeadás és szorzás* alapműveletei, $-x$ a szám ellentettje (szorzás -1 -gyel).

Érdekes Házi Feladat megkeresni, hogy mely axiómák teljesülnek és melyek nem, $\mathcal{R}$ nem Boole algebra