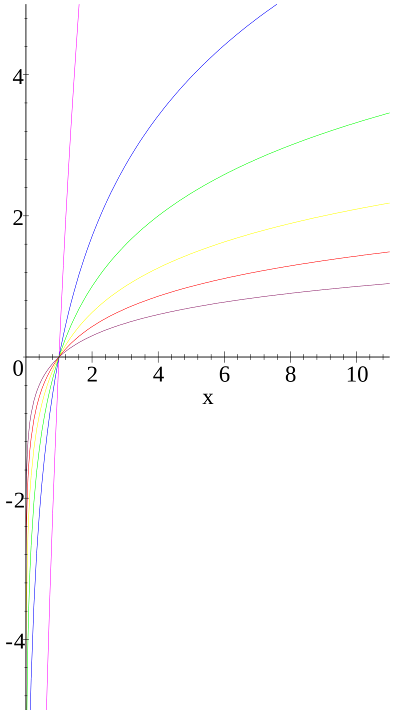
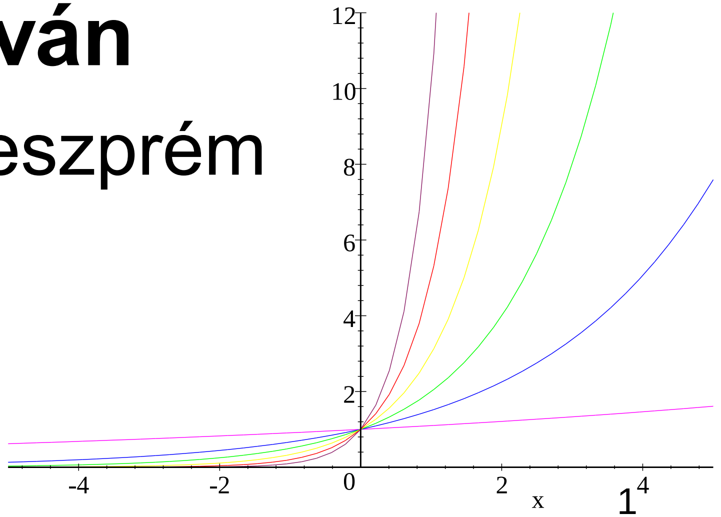
Matematikai Analízis elemei



dr. Szalkai István

Pannon Egyetem, Veszprém

2020. okt. **04**.



honlap:

> http://math.uni-pannon.hu/~szalkai/

… Analízis I. ... *Levelező* **…**

email:

> szalkai@almos.uni-pannon.hu

dr. Szalkai István oktatói honlapja

Pannon Egyetem /Veszprém/, Matematika Tanszék
I épület 313. szoba
http://math.uni-pannon.hu/~szalkai/

email: Szalkai@almos.uni-pannon.hu

ANALÍZIS I.

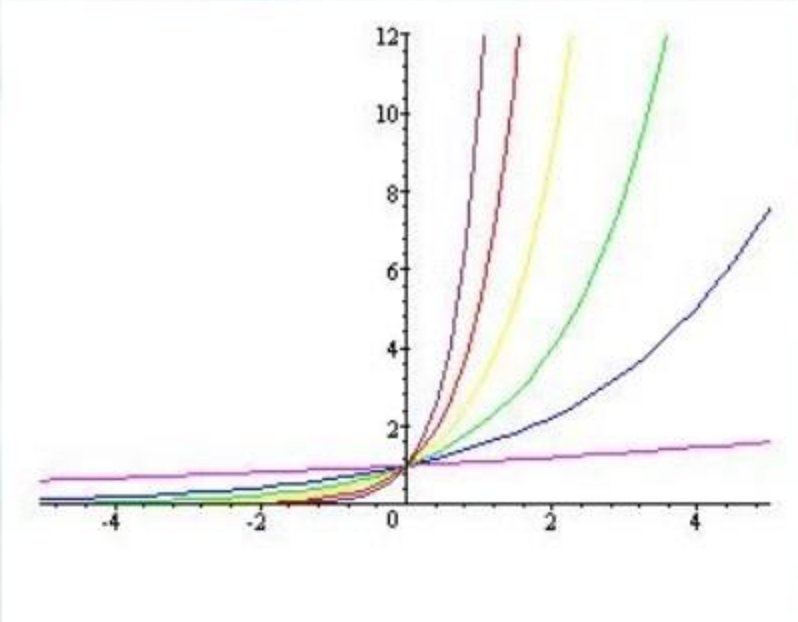
 *Segédletek a Levelezős oktatáshoz* (html)

Mintapéldák szigorlatra készülő gépészmérnököknek (pdf) /'09.07.25./

Szemléletes Analízis I. tankönyv /'11.09.07./
(Sorozatok, Egyváltozós függvények alapjai, Folytonosság, Differenciálhatóság,
Alkalmazások. 115 oldal + 7 oldal Tárgymutató + 15 Ábra).
Letölthető: javított változat (pdf,'180126) vagy tankonyvtar.hu (zip)
Digiális mellékletek: Összesítés Animaciok-leiras.txt ,
forgásszög szinusza (swf) , (exe) , intervallum-felező program (exe) ,
derivált definíciója (gif) , - növekszik (avi) , - csökken (avi) , integrálfüggvény (g
további animációk: (zip, 600kb) , (gif, 30Mb) .
Hallgatói vélemény: 1.gif , 2.gif

Analízis I. feladatgyűjtemény (ISBN 0202009 000542)

Megjelent 2009. november 1-én!
>>> több mint **850** feladat *részletes megoldásokkal* 300 oldal
Tartalom: t1 , t2 , t3 , t4 , t5 , Bevezetés: b1 , b2 ,
Hibajegyzék /**'11.09.12./**



Matematikai ANALÍZIS

Oktatási segédletek a "Közgazdaságtan Matematikai Alapjai" levelező tárgyhoz

Elemi függvények emlékeztető /'08.04.04./ (zip) , (pdf)

Kiszámolgató /'12.08.13./ (pdf)

Elemi függvények emlékeztető /'08.04.04./ (zip) , (pdf)

Kiszámolgató /'12.08.13./ (pdf)

Mikó T.-Szalkai I.: Analízis I. /'11.09.07./
(Sorozatok, Egyváltozós függvények alapjai, Folytonosság, Differenciálhatóság, Integ
Alkalmazások. 115 oldal + 7 oldal Tárgymutató + 15 Ábra).
Letöltés: javított változat (pdf,'180126)
Digiális mellékletek: Összesítés Animaciok-leiras.txt ,
forgásszög szinusza (swf), (exe),
Bolyai Farkas algoritmusa: (xls) ,
gyökközelítés intervallumfelezéssel (ppt), (exe), tanulság: (pdf) ,
derivált definíciója (gif) , - növekszik (avi) , - csökken (avi) , integrálfüggvény (gif) ,
további animációk: (zip1, 600kb) , (zip2, 36Mb) .
Hallgatói vélemény: 1.gif , 2.gif

Koltay L.-Szalkai I.: Analízis I. feladatgyűjtemény (ISBN 0202009 000542)
Megjelent 2009.november 1-én!
>>> több mint **850** feladat *részletes megoldásokkal* 300 oldal
Tartalom: t1 , t2 , t3 , t4 , t5 , Bevezetés: b1 , b2 ,
Hibajegyzék **/'11.09.12./**

Előadás bemutató **/'18.12.17./** (ppt) , (pdf) **javított:** (1resz.pdf) , (6resz.pdf)
Deriválgató (pdf) /'12.08.13./, megoldások /'18.11.01./.
Numerikus integrálás példa (pdf) /'18.11.01./

Táblázatok: derivált.gif /jav: '10.02.04./ , integrált.pdf , részletesebb: Der+Int-nagy /jav: '12.08.13./

Többváltozós függvények: Bevezetes.pdf /18.10.30./

Tematika: 2006-2011 között (doc) , 2012.szept.01. után (doc)
2007.dec.22.-2008.jan.11. zh-k feladatsorai (doc)

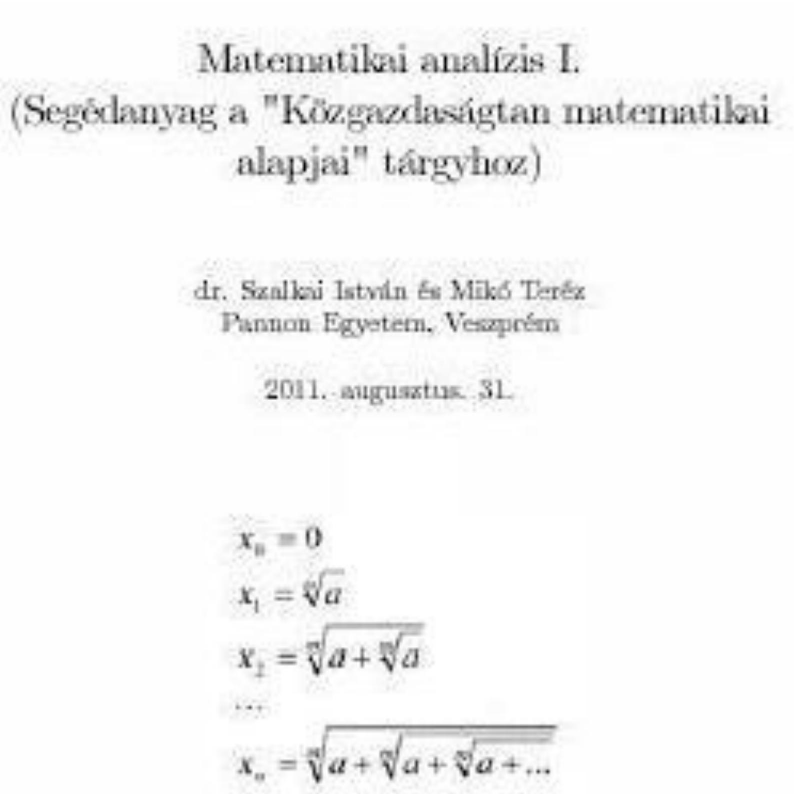
- **vizsgák: írásbeli, példák+elmélet**

(lásd honlapomon feladatsorok)

december első fele

!!!! igazolvány

tankönyvek:

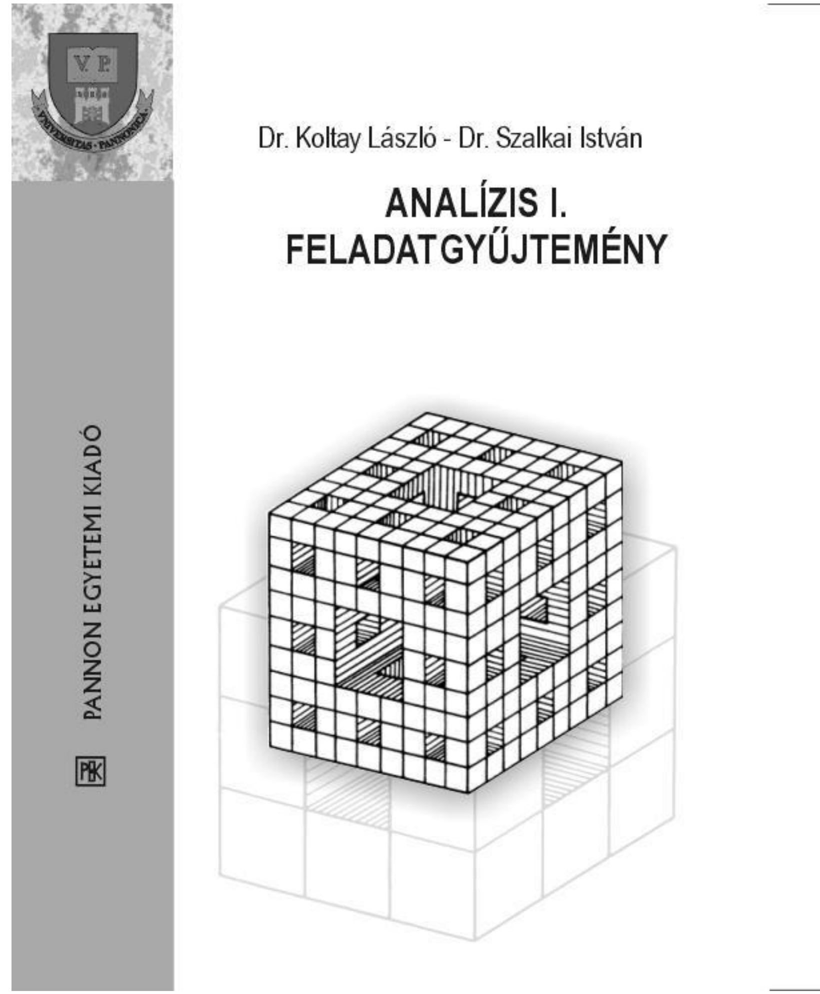


Matematikai analízis I.
(Segédanyag a "Közgazdaságtan matematikai alapjai" tárgyhoz)

dr. Szalkai István és Mikó Teréz
Pannon Egyetem, Veszprém

2011. augusztus. 31.

$$x_0 = 0$$
$$x_1 = \sqrt[n]{a}$$
$$x_2 = \sqrt[n]{a + \sqrt[n]{a}}$$
$$\ldots$$
$$x_n = \sqrt[n]{a + \sqrt[n]{a + \sqrt[n]{a + \ldots}}}$$



részleteket lásd a honlapomon

Tartalom:

1. **Függvénytani alapfogalmak:** ÉT, ÉK, grafikonok rajzolása, elemi (nevezetes) függvények. Inverz- és összetett függvények.

2. **Sorozatok határértéke:** Elemi átalakítások, nevezetes sorozatok. $(1+{}^{s}/_{n})^{n}$ és "végtelen/ végtelen" alakú feladatok. Alkalmazások.

3. **Sorok határértéke**, mértani sorok.

4. **Függvények határértéke:** egyszerűbb feladatok, gyökkeresés.

5. **Differenciálszámítás** alapjai, érintő egyenlete.

6. **Függvényvizsgálat**, szöveges szélsőérték feladatok.

7. Differenciálszámítás alkalmazásai: érintő egyenlete, Taylor polinomok, L'Hospital szabály

8. **Primitív függvények:** elemi integrálok, parciális- és helyettesítéses integrálás.

9. **Határozott integrál:** Newton-Leibniz szabály, területszámítás. Improprius integrálás. Közelítő integrálás.

10. **Többváltozós függvények:** differenciálszámítás,szélsőértékszámítás.

kezdjük …

1. Függvények

1. <u>Függvénytani alapfogalmak</u> :

$y = f(x) = \ldots$ vagy $f : x \mapsto y$ (f : x |---> y)

Jelölések:

Dom(f) := D_f = ÉT (=Dominium ≈ "*kikötés*")

az *f* függvény **értelmezési tartománya ,**

Im(f) := Range(f) = Ran(f) = R_f = ÉK (=Image=Range)

az *f* függvény **értékkészlete.** •

HF: ism.

Elemi (alap-) függvények: mx+b, x^2 , x^3 , $x^{1/2}$, 1/x , $^{a}/_{(x-b)}$,
sin(x) , cos(x) , tan(x)=tg(x) , cotan(x)=ctg(x) ,
exp(x)=e^x, $\exp_a(x)=a^x$, log(x)=lg(x), ln(x)=$\log_e(x)$ /e~2.71828/,

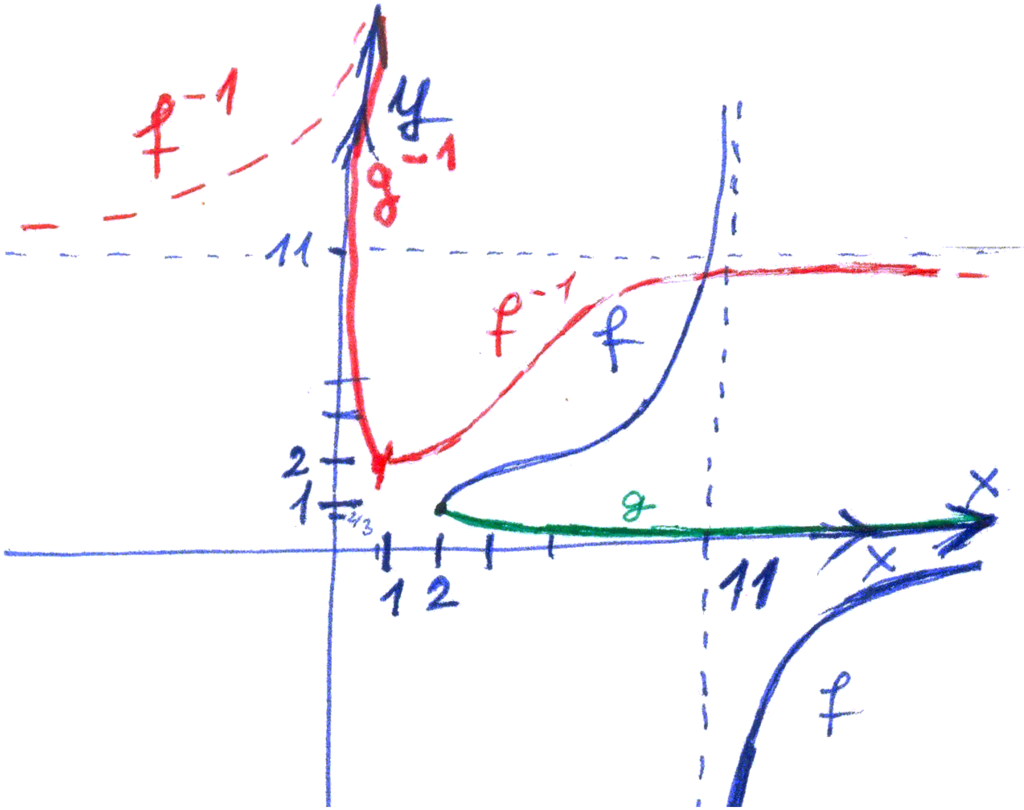
HF: ism., ábrák, zsebszámológép

Pl.

$$y = f(x) = \frac{2}{3-\sqrt{x-2}}$$

x	-20	...	...	+20
y	...	...	...	...

$$y = g(x) = \frac{2}{3+\sqrt{x-2}}$$



1.b) <u>Függvények inverze</u>

f : $x \mapsto y$ és Dom(f)

$x \leftarrow y$: **f^{-1}** és Dom(f^{-1}) ,

vagyis: $f^{-1}(y)=x \Leftrightarrow y=f(x)$ •

Észrevétel: f *nem* invertálható, ha

van $x_1 \neq x_2$ amelyekre $f(x_1) = f(x_2)$. •

Definíció: f **injektív** (**egy-egy értelmű**), ha *nincs* fenti x_1 és x_2 , *azaz*: $x_1 \neq x_2$ <u>esetén</u> ($\Rightarrow$) $f(x_1) \neq f(x_2)$. •

Ellenőrzése a gyakorlatban:

$f(x_1) = f(x_2) \;\Rightarrow\; \ldots \;\Rightarrow\; x_1 = x_2$. •

f^{-1} meghatározása:

$y = f(x) \;\Rightarrow\; \ldots \;\Rightarrow\; x = f^{-1}(y)$. •

Pl. $f(x_1) = f(x_2)$

$$\frac{2}{3-\sqrt{x_1 - 2}} = \frac{2}{3-\sqrt{x_2 - 2}}$$

$$\frac{3-\sqrt{x_1 - 2}}{2} = \frac{3-\sqrt{x_2 - 2}}{2}$$

$$3-\sqrt{x_1 - 2} = 3-\sqrt{x_2 - 2}$$

$$-\sqrt{x_1 - 2} = -\sqrt{x_2 - 2}$$

$$x_1 - 2 = x_2 - 2$$

$$x_1 = x_2$$

OK tehát invertálható.

Pl. $f(x_1) = f(x_2)$

$$\frac{2}{3-\sqrt{x_1-2}} = \frac{2}{3-\sqrt{x_2-2}}$$

$$\frac{3-\sqrt{x_1-2}}{2} = \frac{3-\sqrt{x_2-2}}{2}$$

$$3-\sqrt{x_1-2} = 3-\sqrt{x_2-2}$$

$$-\sqrt{x_1-2} = -\sqrt{x_2-2}$$

$$x_1-2 = x_2-2$$

$$x_1 = x_2$$

OK tehát invertálható.

$$y = f(x)$$

$$y = \frac{2}{3-\sqrt{x-2}}$$

$$\frac{1}{y} = \frac{3-\sqrt{x-2}}{2}$$

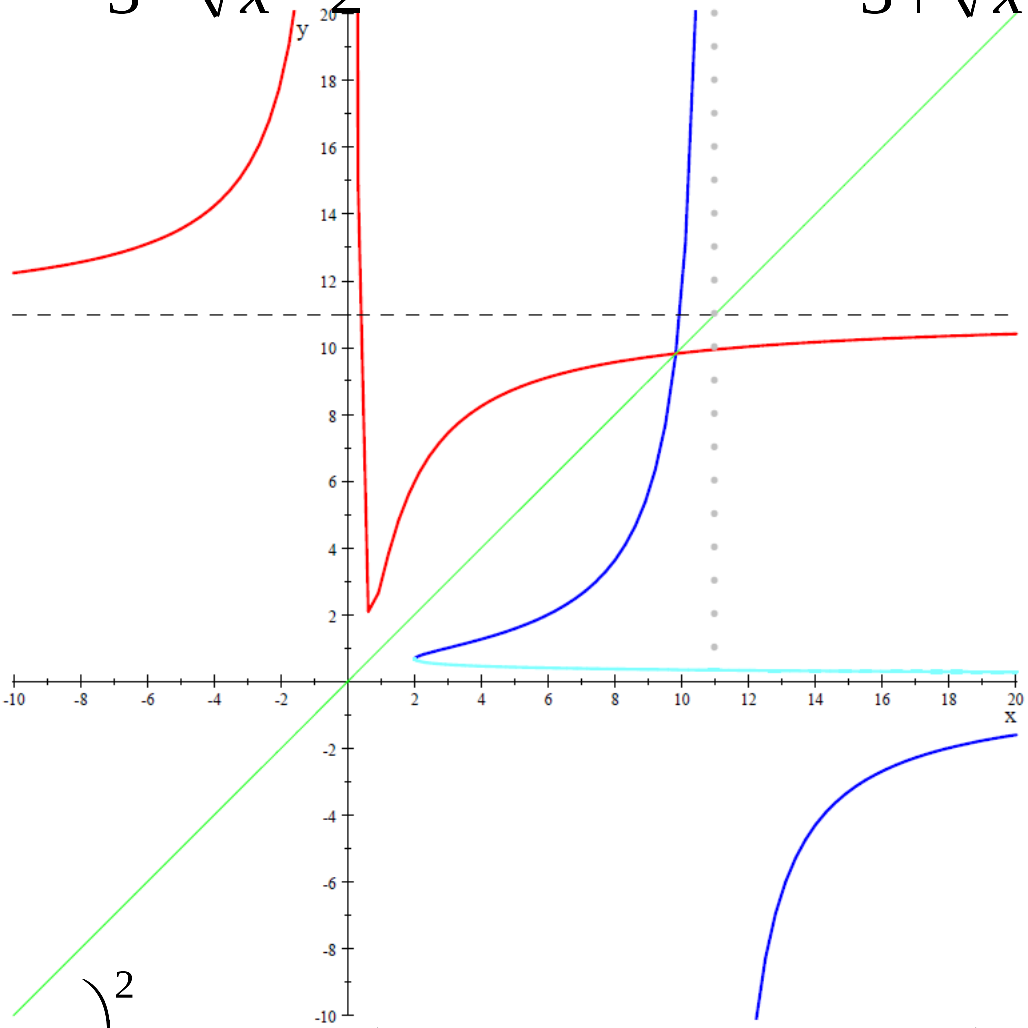
$$\frac{2}{y} = 3-\sqrt{x-2}$$

$$\frac{2}{y} - 3 = -\sqrt{x-2}$$

$$\left(\frac{2}{y}-3\right)^2 = x-2$$

$$f^{-1}(y) = \left(\frac{2}{y}-3\right)^2 + 2 = x$$

$$y = f(x) = \frac{2}{3-\sqrt{x-2}} \quad \neq \quad y = g(x) = \frac{2}{3+\sqrt{x-2}}$$



$$f^{-1}(y) = \left(\frac{2}{y} - 3\right)^2 + 2 = g^{-1}(y) \qquad \text{DE}: \quad Dom(f^{-1}) \neq Dom(g^{-1})$$

f(x), ***$f^{-1}(x)=g^{-1}(x)$***, *y=x*, ***g(x)***

$$y = f(x)$$

például:

négyzetre emeléskor az előjel eltűnik ...

$$y = \frac{2}{3-\sqrt{x-2}}$$

$$\frac{1}{y} = \frac{3-\sqrt{x-2}}{2}$$

$$\frac{2}{y} = 3-\sqrt{x-2}$$

$$\frac{2}{y} - 3 = -\sqrt{x-2}$$

=>

$$\frac{2}{y} - 3 \le 0$$

$$\frac{2}{y} \le 3$$

...

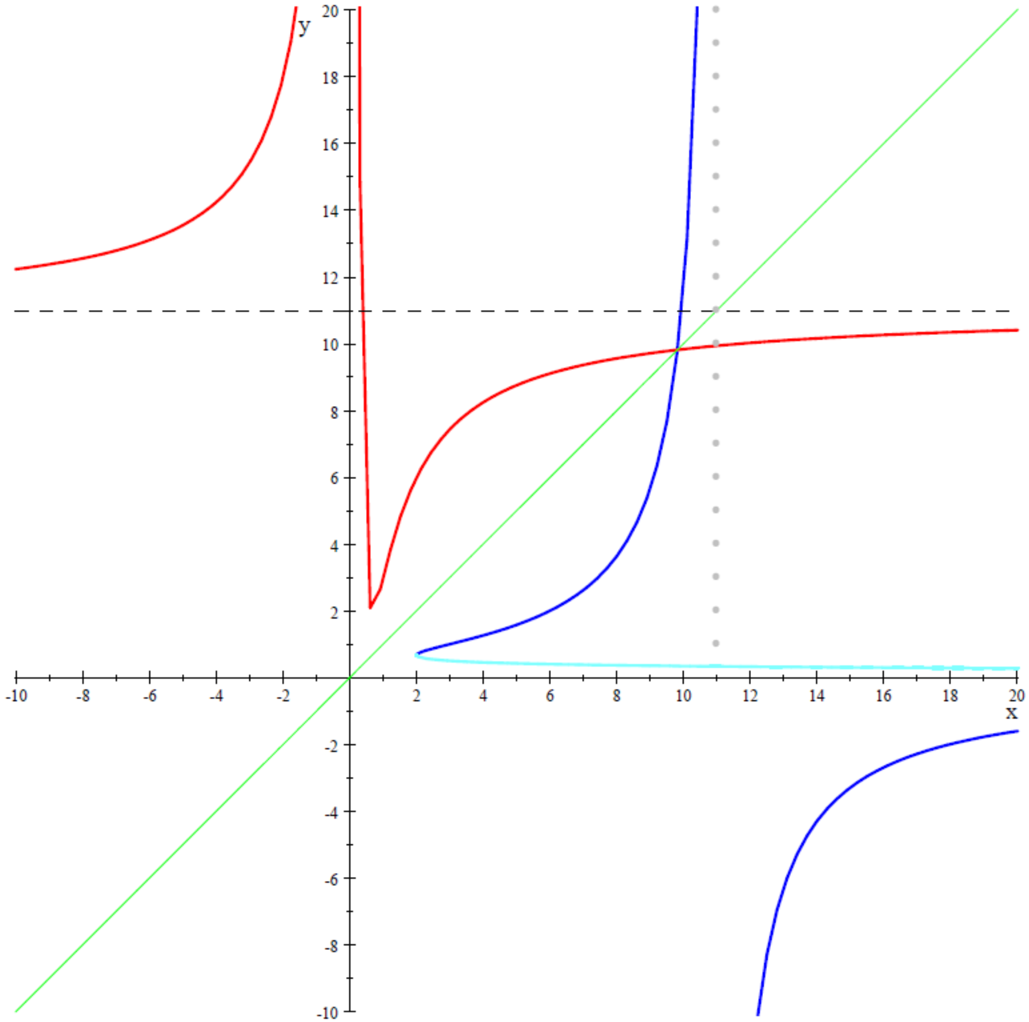
$$\{y \le 0 \ \text{ VAGY } \ 2/3 \le y\}$$

$$= Dom(f^{-1})$$

$$\left(\frac{2}{y} - 3\right)^2 = x - 2$$

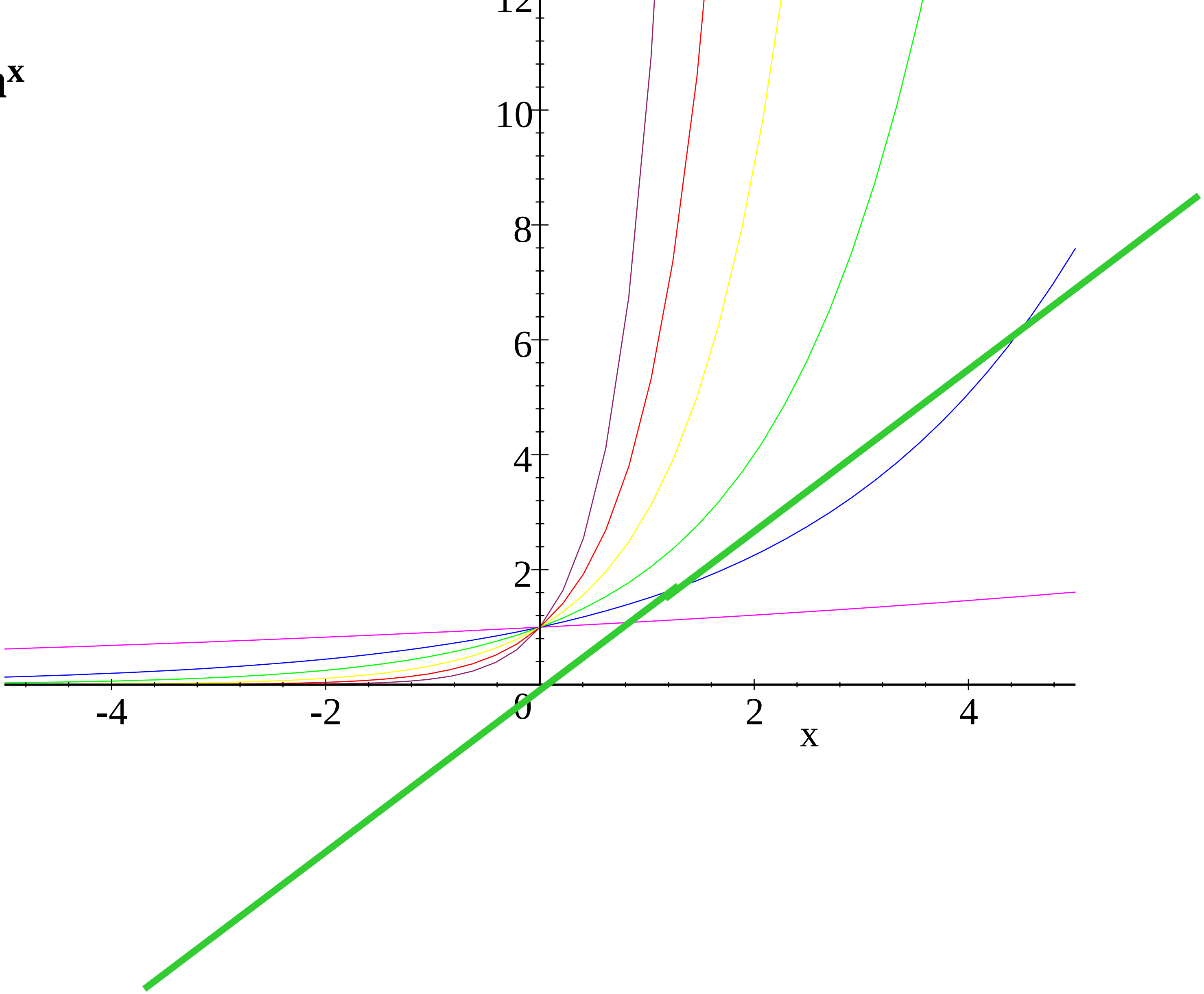
$$f^{-1}(y) = \left(\frac{2}{y} - 3\right)^2 + 2 = x$$

grafikusan: tükrözés az **y=x** egyenesre:

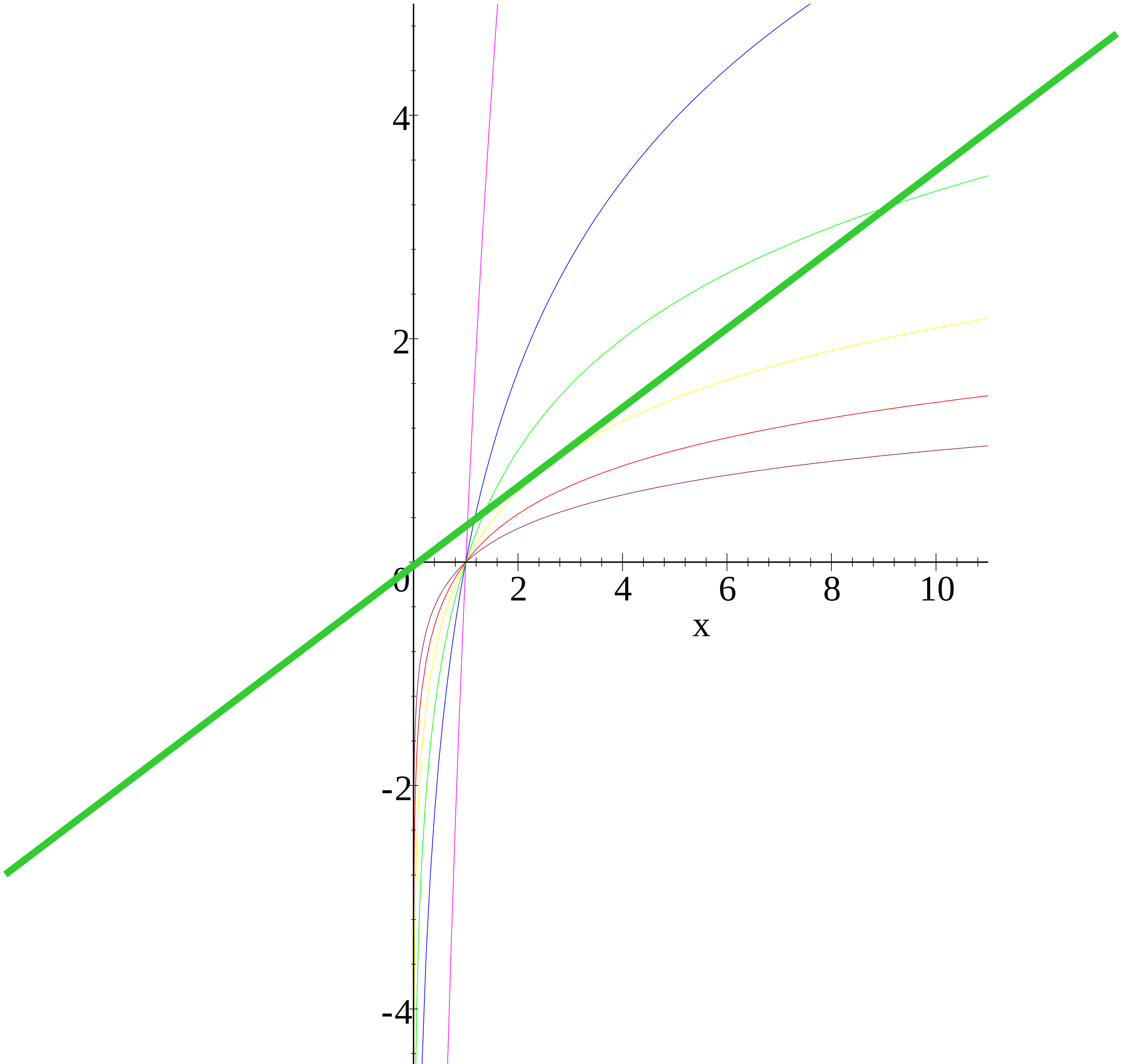


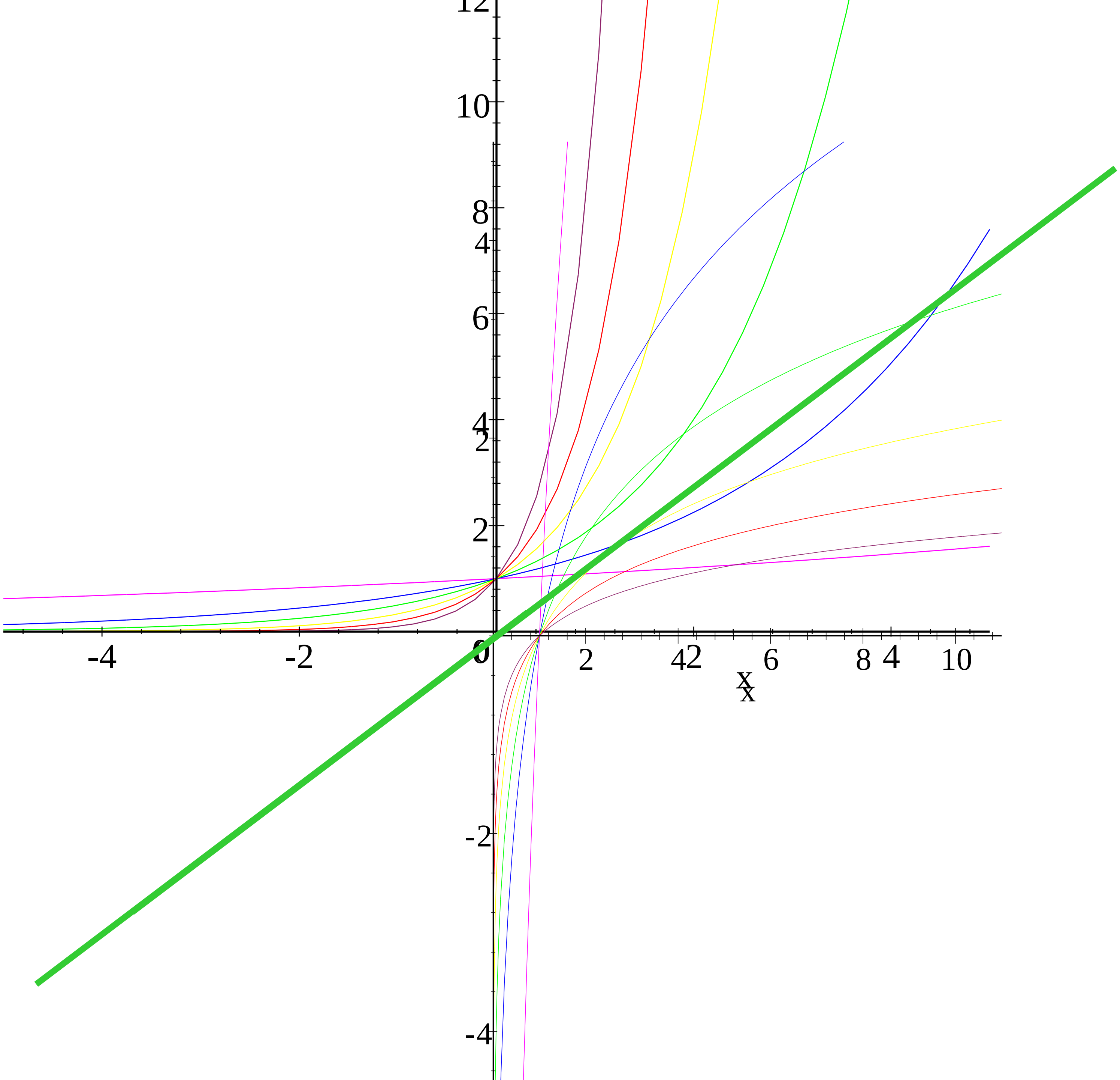
f(x) **,** ***f***$^{-1}$***(x)=g***$^{-1}$***(x)*** **,** *y=x* **,** ***g(x)***

$y=a^x$



$\log_a(x)$





12
10
8
6
4
2
-2
-4
-4
-2
0
2
4
6
8
10
x

1.c) <u>Összetett függvények</u> (fv.-ek kompozíciója)

Definíció: Legyenek $g : A \to B$ és $f : Y \to Z$ tetszőleges függvények, $\mathrm{Im}(g) \cap \mathrm{Dom}(f) \neq \emptyset$.
Ekkor $h := f \circ g$ az f és g függvények **kompozíciója** a következő:

$$\mathbf{h(x) := (f \circ g)(x) := f(g(x))}$$

és

$$\mathbf{Dom(h) = \{ x \in Dom(g) : g(x) \in Dom(f) \}} \, . \quad \bullet$$

Pl. $$(\sin \circ \sqrt{\ })(x) = \sin\left(\sqrt{x}\right) \quad \neq \quad (\sqrt{\ } \circ \sin)(x) = \sqrt{\sin(x)}$$

és

$$Dom\left(\sin\sqrt{x}\right) \quad \neq \quad Dom\left(\sqrt{\sin(x)}\right)$$

!!!!! g(x)="**belső függvény**", f(x)="**külső függvény**" !!!!!

1.64. Példa: $f\left(x\right) := \dfrac{1+x^2-3x}{\ln\left(2-x\right)+1}$ $g\left(x\right) := 5-x$

$f \circ g = ?$

1.64. Példa: $f(x) := \dfrac{1 + x^2 - 3x}{\ln(2-x) + 1}$ $g(x) := 5 - x$

$f \circ g = ?$

Megoldás:

$$f(g(x)) = \frac{1 + (5-x)^2 - 3 \cdot (5-x)}{\ln(2 - (5-x)) + 1} \tag{1.21}$$

1.64. Példa: $f(x) := \dfrac{1 + x^2 - 3x}{\ln(2 - x) + 1}$ $\quad g(x) := 5 - x$

$f \circ g = ?$

Megoldás:

$$f(g(x)) = \frac{1 + (5 - x)^2 - 3 \cdot (5 - x)}{\ln(2 - (5 - x)) + 1} \tag{1.21}$$

$$Dom(f \circ g) := \{ x \in Dom(g) \mid g(x) \in Dom(f) \}$$

1.64. Példa: $f(x) := \dfrac{1+x^2-3x}{\ln(2-x)+1}$ $g(x) := 5-x$

$f \circ g = ?$

Megoldás:

$$f(g(x)) = \frac{1+(5-x)^2-3\cdot(5-x)}{\ln(2-(5-x))+1} \tag{1.21}$$

$$Dom(f \circ g) := \{\, x \in Dom(g) \mid g(x) \in Dom(f)\}$$

$$x \in Dom(g) = \mathbb{R} \quad \textbf{\textit{és}} \quad 0 < (2-g) \ \textit{és} \ \ln(2-g)+1 \neq 0$$

1.64. Példa: $f(x) := \dfrac{1 + x^2 - 3x}{\ln(2-x)+1}$ $g(x) := 5 - x$

$f \circ g = ?$

Megoldás:

$$f(g(x)) = \frac{1 + (5-x)^2 - 3 \cdot (5-x)}{\ln(2-(5-x))+1} \tag{1.21}$$

$$Dom(f \circ g) := \{\, x \in Dom(g) \mid g(x) \in Dom(f)\}$$

$$x \in Dom(g) = \mathbb{R} \quad \textit{\textbf{és}} \quad 0 < (2-g) \ \textit{és} \ \ln(2-g)+1 \neq 0$$

$$g < 2 \quad \textit{és} \quad g \neq 2 - \frac{1}{e}$$

$$5 - x < 2 \quad \textit{és} \quad 5 - x \neq 2 - \frac{1}{e}$$

$$3 < x \quad \textit{és} \quad x \neq 3 + \frac{1}{e}$$

1.64. Példa: $f(x) := \dfrac{1+x^2-3x}{\ln(2-x)+1}$ $\qquad g(x) := 5-x$

$f \circ g = ?$

Megoldás:
$$f(g(x)) = \frac{1+(5-x)^2-3\cdot(5-x)}{\ln(2-(5-x))+1} \tag{1.21}$$

$$Dom(f\circ g) := \{\, x \in Dom(g) \mid g(x) \in Dom(f)\}$$

$$x \in Dom(g) = \mathbb{R} \quad \textbf{\textit{és}} \quad 0 < (2-g) \ \textit{és} \ \ln(2-g)+1 \neq 0$$

$$g < 2 \qquad \textit{és} \qquad g \neq 2-\frac{1}{e}$$

$$5-x < 2 \qquad \textit{és} \qquad 5-x \neq 2-\frac{1}{e}$$

$$3 < x \qquad \textit{és} \qquad x \neq 3+\frac{1}{e}$$

tehát $\qquad Dom(f\circ g) = \left\{x \in \mathbb{R} \ : \ 3 < x \ \textit{és} \ x \neq 3+\dfrac{1}{e}\right\}$

2a. Sorozatok

2. Sorozatok

$n \to \infty$

Definíció: számsorozat = **numerikus sorozat** :

Tetszőleges $a : \mathrm{N} \to \mathrm{R}$ *függvényt* sorozatnak nevezünk.

Az $a(n)$ értéket általában $\boldsymbol{a_n}$ -el jelöljük. •

Pl.: $a_n = \dfrac{n^2 + 2n - 5}{n^2 - 3n + 8}$

$a_{10} = {}^{115}/_{78} \sim 1{,}474358$

$a_{20} = {}^{435}/_{348} = 1{,}25$-

$a_{100} = {}^{10195}/_{9708} \sim 1{,}050165$

$a_{1000} = {}^{1001995}/_{997008} \sim 1{,}005002$

$a_{10000} = {}^{100019995}/_{99970008} \sim 1{,}000500$

…

sejtés:

ebben a példában

$n \to \infty$

esetén

$a_n \to 1$

Definíció: Az $\{ a_n \}$ sorozat **konvergens**, ha *létezik* olyan $A \in R$ szám, amelyre:

tetszőleges $\varepsilon > 0$ *pozitív számhoz* (="**hibahatár**") *létezik olyan* $n_0 \in N$ *természetes szám* (="**küszöbszám**"), *amelyre* *tetszőleges* $n > n_0$ *számra*:

$$\boxed{| a_n - A | < \varepsilon}$$ (=a_n eltérése A -tól).

A fenti A számot hívjuk a sorozat (***véges***) **határértékének** (=limesz), és így **jelöljük:**

$$\lim_{n \to \infty} a_n = A \qquad \text{vagy} \qquad a_n \to A \quad .$$ •

Definíció: Az $\{ a_n \}$ sorozatot ***konvergens*nek** nevezzük, ha létezik fenti (véges) határértéke.

Az $\{ a_n \}$ sorozatot ***divergens*nek** nevezzük, ha *nem* konvergens. •

Számolás:

" $\frac{\infty}{\infty}$ " esetén a nevező legnagyobb tagjával egyszerűsítünk:

pl.:

$$\frac{n^2+2n-5}{n^2-3n+8} = \frac{n^2\left(1+\frac{2}{n}-\frac{5}{n^2}\right)}{n^2\left(1-\frac{3}{n}+\frac{8}{n^2}\right)} = \frac{1+\frac{2}{n}-\frac{5}{n^2}}{1-\frac{3}{n}+\frac{8}{n^2}} \to 1$$

Nevezetes határértékek, tételek, módszerek:

Ld. "**Konvergencia kritériumok**" 1.old. a honlapon !

Feladatok:

Ld. **Feladatgyűjtemény** 2.fejezet, 2.1, 2.4, 2.8 feladatok a honlapon !

Számolás:

"$\frac{\infty}{\infty}$" esetén a nevező legnagyobb tagjával egyszerűsítünk:

pl.: $$\lim_{n\to\infty} \frac{0.1n^2-3n+8}{512n+99}$$ = ?

Számolás:

"$\frac{\infty}{\infty}$" esetén a nevező legnagyobb tagjával egyszerűsítünk:

pl.: $$\lim_{n\to\infty} \frac{0.1n^2-3n+8}{512n+99} = ?$$

$$\frac{0.1n^2 - 3n + 8}{512n + 99} = \frac{0.1n - 3 + \frac{8}{n}}{512 + \frac{99}{n}} \to \frac{\infty}{512} = \infty$$

<u>Definíció:</u> Az $\{a_n\}$ sorozat **határértéke** $+\infty$ ha *tetszőleges* $p \in R$ szám esetén *van olyan* $n_p \in N$ szám (= "**küszöbszám**") amelyre minden $n>n_p$ esetén

$$a_n > p.$$

A fentieket így jelöljük: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ vagy $a_n \to +\infty$.•

<u>Definíció:</u> Az $\{a_n\}$ sorozat **határértéke** $-\infty$ ha *tetszőleges* $p \in R$ szám esetén *van olyan* $n_p \in N$ szám (="**küszöbszám**"), amelyre minden $n>n_p$ esetén

$$a_n < p.$$

A fentieket így jelöljük: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ vagy $a_n \to -\infty$.•

((mindössze két helyen van változás!!))

Fontos példa:

$$\left(\frac{n+3}{n-2}\right)^n \to ?$$

Fontos példa:

$$\xcancel{\left(\frac{n+3}{n-2}\right)^n \longrightarrow 1^n \to 1}$$

HIBÁS !

Fontos példa:

$$\cancel{\left(\frac{n+3}{n-2}\right)^n \to 1^n \to 1}$$

HIBÁS !

Felhasznált **Tétel**: (ld."kritériumok")

$$\left(1+\frac{t}{n}\right)^n \to e^t \quad \text{minden } t \in R \text{ valósszámra.}$$

Fontos példa:

$\boxed{1^{\infty}\ \text{típus:}}$

$$\left(\frac{n+3}{n-2}\right)^n = \left(\frac{\dfrac{n+3}{n}}{\dfrac{n-2}{n}}\right)^n = \frac{\left(\dfrac{n+3}{n}\right)^n}{\left(\dfrac{n-2}{n}\right)^n} = \frac{\left(1+\dfrac{3}{n}\right)^n}{\left(1+\dfrac{-2}{n}\right)^n} \to \frac{e^3}{e^{-2}} = e^5.$$

Felhasznált **Tétel**: (ld."kritériumok")

$$\left(1+\frac{t}{n}\right)^n \to e^t \quad \text{minden } t \in R \text{ valósszámra.}$$

Nevezetes sorozatok határértékei

$$n^\alpha \to \begin{cases} 0 & \text{ha } \alpha < 0 \\ 1 & \text{ha } \alpha = 0 \\ \infty & \text{ha } \alpha > 0 \quad (\alpha \in \mathbb{R}) \end{cases} \qquad q^n \to \begin{cases} 0 & \text{ha } |q| < 1 \\ 1 & \text{ha } q = 1 \\ \infty & \text{ha } q > 1 \\ div & \text{máskor} \quad (q \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

$$\log_a n \ll n^k \ll b^n \ll n! \ll n^n \qquad \left(a, b, k \in \mathbb{R}^+ ,\ 1 < b\right)$$

azaz

$$\frac{\log_a n}{n^k} \to 0\,, \quad \frac{n^k}{b^n} \to 0\,, \quad \frac{b^n}{n!} \to 0\,, \quad \frac{n!}{n^n} \to 0\,,$$

$$\sqrt[n]{a} \to 1 \quad (a \in \mathbb{R}_+)\,, \quad \sqrt[n]{n} \to 1\,, \quad \sqrt[n]{n!} \to \infty$$

$$\left(1 + \frac{t}{n}\right)^n \to e^t \qquad (t \in \mathbb{R}) \quad .$$

Sorozatok alkalmazása (gyors konvergencia!):

1) Newton gyökvonás:

$$x_0 \in \mathbb{R}^+, \quad x_{n+1} := \frac{x_n + \frac{\gamma}{x_n}}{2} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{\gamma}$$

2) Bolyai Farkas trinom egyenletek:

$$x^m = a + x \qquad (m > 2,\ m \in \mathbb{N},\ a \in \mathbb{R}^+)$$

$$\Downarrow$$

$$x_0 := 0 \quad \acute{e}s \quad x_{n+1} := \sqrt[m]{x_n + a} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

$$\Downarrow$$

$$x' := \lim_{n\to\infty} x_n$$

(Részletesen lásd a tankönyvben.)

http://math.uni-pannon.hu/~szalkai/Analizis1TK-animaciok.zip , X12-Bolyai-gyok.xls

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1–2	Bolyai Farkas gyökközelítő algoritmusa							*Szalkai István, Veszprém, 2013.07.23.*		
3–4	$x^m = a + x \qquad (m > 2,\ m \in \mathbb{N},\ a \in \mathbb{R}^+)$									
5	$x_0 := 0 \quad \text{és} \quad x_{n+1} := \sqrt[m]{x_n + a}$							A piros mezőkbe *tetszőleges* pozitív számokat írva megkapjuk a sorozat első tíz tagját, x_{10} már nyolc tizedejegyre pontosan közelíti az $\mathbf{x^m=a+x}$ egyenlet gyökét!		
6										
7										
8	**m =**	**3**	**x_0 =**			**0**				
9			**x_1 =**	$(x_0+a)^{1/m}$ =		1,7099759467				
10	a =	5	**x_2 =**	$(x_1+a)^{1/m}$ =		1,8861388233				
11			**x_3 =**	$(x_2+a)^{1/m}$ =		1,9025025954				
12			**x_4 =**	$(x_3+a)^{1/m}$ =		1,9040083978				
13			**x_5 =**	$(x_4+a)^{1/m}$ =		1,9041468428				
14			**x_6 =**	$(x_5+a)^{1/m}$ =		1,9041595706				
15			**x_7 =**	$(x_6+a)^{1/m}$ =		1,9041607407				
16			**x_8 =**	$(x_7+a)^{1/m}$ =		1,9041608482				
17			**x_9 =**	$(x_8+a)^{1/m}$ =		1,9041608581				
18			**x_{10}=**	$(x_9+a)^{1/m}$ =		1,9041608590				

2b. Sorok

3. Sorok

!!! Sor ≠ sorozat !!!

Probléma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0+a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots = ? \quad \text{(végtelen sok tag)}$$

(matematikus) Megoldás:

Definíció: (*részletösszegekkel*)

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n := \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=0}^{N} a_n\right) := \lim_{N\to\infty}(a_0+a_1+a_2+\ldots+a_N) = \lim_{N\to\infty}(s_N)$$

ha ez a határérték létezik . □

Kiszámítása:

mértani sor: *Ha |q|<1, akkor*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c \cdot q^n = c + cq + cq^2 + \ldots + cq^n + \ldots = c \cdot \frac{1}{1-q}$$

ha $1 \leq q$ akkor $\mathbf{\Sigma} = +/-\propto$, c előjelétől függően

ha $q < -1$ akkor $\mathbf{\Sigma}$ divergens .

Vége az 1. és 2. témának