

## Matematika I. – 5. gyakorló feladatsor

Gazdálkodási és közgazdász szakos I. évf. hallgatók számára (2005)

### Függvények határértéke, folytonosság

1. **Feladat.** Számítsuk ki az alábbi határértékeket, ha léteznek!

(a) $\lim_{x \rightarrow 1} x^2 + 2$	(b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4}$	(c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^3-8}$
(d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-x-2}{(x-2)^2}$	(e) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2-x-10}{x^2-x-2}$	(f) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{3}}{x-3}$
(g) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-2x+1}{x^3-x^2+3x-3}$	(h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+2}{x^2}$	(i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}$
(j) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$	(k) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}$	(l) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{\sqrt{x^2-3}}$
(m) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3-x}-1}{\sqrt{6-x}-2}$	(n) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{ x+2 }{x+2}$	(o) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{ x+2 }{(x+2)^2}$
(p) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{x}$	(q) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{\sin(2x)}$	(r) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{\sqrt[3]{x}}$
(s) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x^2}$	(t) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+\sin^2(x)}{4x^2}$	(u) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin(x)}{1-\cos(x)}$
(v) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2}$		

2. **Feladat.** Számítsuk ki a  $\lim_{x \rightarrow 0} f$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1} f$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} f$  határértékeket (ha léteznek), ahol  $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  és

(a) $f(x) = \frac{x^3-4x}{x^2-10x}$	(b) $f(x) = \frac{x^2-6x+2}{x^3+x^2}$	(c) $f(x) = \frac{x^5-3x^2+x}{x^5-10x^4+1}$
(d) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$	(e) $f(x) = \frac{x-1}{1-\sqrt[3]{x}}$	

3. **Feladat.** Számítsuk ki az alábbi határértékeket, ha léteznek!

(a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+3}{x^2-4}$	(b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^3+5}$	(c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+2}{x+3}$
(d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+2x}{x+3}$	(e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{(x+1)(x+2)} - x$	(f) $\lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{x^2+1} - x)$
(g) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$	(h) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x}$	(i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(x)}{x}$
(j) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}}$	(k) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+2}{x-1} \right)^{1+2x}$	(l) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2+3x-2}{x^2+3x+1} \right)^{x^2+5}$
(m) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2-3}{x^2+x+1} \right)^{x-2}$	(n) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$	

4. **Feladat.** Számítsuk ki az alábbi féoldali határértékeket, ha léteznek!

(a) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{ x-1 }{x-1}$	(b) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{ x-1 }{x-1}$	(c) $\lim_{x \rightarrow -4^+} \frac{2x^2+5x-12}{x^2+3x-4}$
(d) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1}$	(e) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^3-x^2+x-1}{x^3-x}$	(f) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3-x^2+x-1}{x^3-x}$
(g) $\lim_{x \rightarrow -1^-} 2^{\frac{1}{x+1}}$	(h) $\lim_{x \rightarrow -1^+} 2^{\frac{1}{x+1}}$	(i) $\lim_{x \rightarrow 0^-} 2^{\frac{1}{ x } + \frac{1}{x}}$
(j) $\lim_{x \rightarrow 0^+} 2^{\frac{1}{ x } + \frac{1}{x}}$	(k) $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{\sqrt{-2x-x}}{x+2}$	(l) $\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{\sqrt{-2x-x}}{x+2}$
(m) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} 2^{tg(x)}$	(n) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} 2^{tg(x)}$	(o) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

5. **Feladat.** Adjuk meg az  $a$  valós paraméter értékét úgy, hogy az alábbi határértékek létezzenek és végesek legyenek! Számítsuk ki ezen határértékeket!

(a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-a}{x^2-4}$	(b) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2+x-a}{x+3}$	(c) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3-5x^2+ax+24}{x-3}$
--	---	---

6. **Feladat.** Igazoljuk a definíció alapján, hogy az  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$  függvény folytonos az 1-nél!

7. **Feladat.** Hol folytonos a következő függvény?

$$f(x) = \begin{cases} 2^{-x}, & \text{ha } x < -1 \\ 2^x, & \text{ha } -1 \leq x \leq 1 \\ 2x^2, & \text{ha } x > 1 \end{cases}$$

8. **Feladat.** Vizsgáljuk meg, hogy az adott  $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvény (a) hol nem folytonos; (b) van-e ezen helyek között olyan, ahol a függvény balról, vagy jobbról folytonos!

(a)

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x^2, & \text{ha } x \geq 0 \\ -(1 + x^2), & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

(b)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+2}{x^2+3x+2}, & \text{ha } x < -2 \text{ vagy } -2 < x < -1 \\ x^2, & \text{ha } |x| \leq 1 \\ \frac{1}{x^2}, & \text{ha } x > 1 \end{cases}$$

(c)

$$f(x) = (1 + x^2) \cdot \text{sgn}(x), \text{ ahol } \text{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x > 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \\ -1, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

(d)

$$f(x) = \begin{cases} 2\frac{x}{|x|} + 3x, & \text{ha } x \neq 0 \\ -2, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

(e)

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{ha } x \leq 1 \\ 2 - x, & \text{ha } x > 1 \end{cases}$$

9. **Feladat.** Adjunk meg olyan  $c, d$  valós számokat, amelyekre az alábbi függvények folytonosak!

(a)

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} cx^2 - 3, & \text{ha } x \leq 2 \\ cx + 2, & \text{ha } x > 2 \end{cases}$$

(b)

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} c^2x, & \text{ha } x < 1 \\ 3cx - 2, & \text{ha } x \geq 1 \end{cases}$$

(c)

$$f : [-3; 3] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} c, & \text{ha } x = -3 \\ \frac{9 - x^2}{4 - \sqrt{x^2 + 7}}, & \text{ha } |x| < 3 \\ d, & \text{ha } x = 3 \end{cases}$$

(d)

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 4x, & \text{ha } x \leq 1 \\ cx + d, & \text{ha } -1 < x \leq 2 \\ -5x, & \text{ha } x > 2 \end{cases}$$

*Jó munkát!*