Bevezetés a matematikába I. - VEMIMAP146B

II. Leképezések

Hartung Ferenc

Pannon Egyetem
Matematika Tanszék

2018

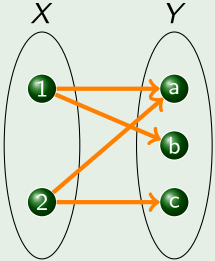
Legyenek A és B halmazok.

Definíció:

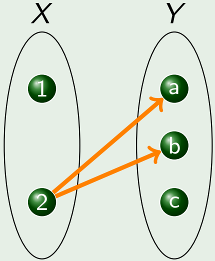
Az $A \times B$ Descartes-szorzat részhalmazait A-ból B-be történő megfeleltetésnek nevezzük. Az A halmazt a megfeleltetés indulási halmazának, a B halmazt pedig a megfeleltetés érkezési halmazának hívjuk.

Példa:

Legyen $X = \{1, 2\}$ és $Y = \{a, b, c\}$.
$\rho_1 = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, c)\}$ és $\rho_2 = \{(2, a), (2, b)\}$ megfeleltetések X-ből Y-ba. A megfeleltetéseket nyíldiagrammon ábrázolhatjuk:



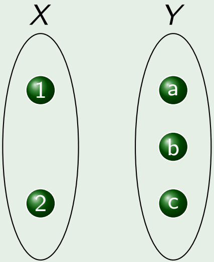
ρ_1 nyíldiagrammja



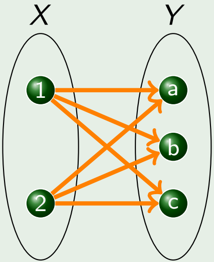
ρ_2 nyíldiagrammja

Példa:

$\rho_3 = \emptyset$ és $\rho_4 = X \times Y$ megfeleltetések X-ből Y-ba.



ρ_3 nyíldiagrammja



ρ_4 nyíldiagrammja

Definíció:

A $\rho \subseteq A \times B$ *megfeleltetés* *értelmezési tartományán* *azon* A*-beli* a *elemek halmazát értjük, amelyhez létezik olyan* $b \in B$*, hogy* $(a, b) \in \rho$.
A $\rho \subseteq A \times B$ *megfeleltetés* *értékkészletének* *nevezzük azon* B*-beli* b *elemek halmazát, amelyhez létezik olyan* $a \in A$*, hogy* $(a, b) \in \rho$.
A ρ *megfeleltetés értelmezési tartományát* $D(\rho)$ *az értékkészletét* $R(\rho)$ *jelöli.*

Példa:

Legyen $X = \{1, 2\}$ és $Y = \{a, b, c\}$, $\rho_1 = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, c)\}$ és $\rho_2 = \{(2, a), (2, b)\}$ megfeleltetések X-ből Y-ba.
Ekkor ρ_1 értelmezési tartománya a $D(\rho_1) = \{1, 2\} \subseteq X$ halmaz, értékkészlete az $R(\rho_1) = \{a, b, c\} \subseteq Y$ halmaz.
ρ_2 értelmezési tartománya a $D(\rho_2) = \{2\} \subseteq X$ halmaz, értékkészlete az $R(\rho_2) = \{a, b\} \subseteq Y$ halmaz.

Definíció:

Egy A-ból B-be történő $\varphi \subseteq A \times B$ megfeleltetést ***leképezésnek*** *vagy* ***függvénynek*** *hívunk, ha bármely $a \in A$ elemhez pontosan egy $b \in B$ elem létezik, amelyre $(a, b) \in \varphi$.*
Egy A-ból B-be definiált φ leképezést a $\varphi : A \to B$ képlettel is jelöljük.
Ekkor ha $(a, b) \in \varphi$, akkor a b elemet az a elem ***képének****, az a elemet pedig a b elem* ***ősének*** *hívjuk. Az $(a, b) \in \varphi$ összefüggést pedig a $\varphi(a) = b$ módon is írjuk.*

Megjegyezzük, hogy a matematikai analízisben a $\varphi : A \to B$ függvény fogalmát egy kicsit általánosabban is szokás értelmezni: olyan megfeleltetésként, amelynél egy elemnek legfeljebb egy képe van. Ekkor a függvény értelmezési tartománya a

$$D(\varphi) = \{a \in A : \text{létezik } a\text{-nak képe}\}$$

halmaz. A fenti (algebrában megszokott) definíció szerint egy leképezés értelmezési tartománya mindig megegyezik az indulási halmazzal, azaz a leképezést a lehető legszűkebb halmazon definiáljuk.

Véges értelmezési tartományon definiált leképezést megadhatunk a hozzárendelési szabály, azaz az (a, b) párok felsorolásával:

Példa:

Legyen $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{a, b, c, d\}$, és legyen

$$\varphi_1 = \{(1, b), (2, a), (3, a), (4, c), (5, a)\}.$$

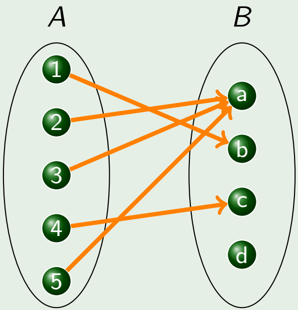
Ekkor $\varphi_1 : A \to B$ leképezés, mivel minden A-beli elemnek pontosan egy képe van B-ben.
A φ_1 leképezés értelmezési tartománya a $D(\varphi_1) = A$ halmaz, értékkészlete pedig az $R(\varphi_1) = \{a, b, c\} \subset B$ halmaz.

Példa:

Használjuk az alábbi jelölést is az előbbi leképezés megadására:

$$\varphi_1 : A \to B, \quad 1 \mapsto b,\ 2 \mapsto a,\ 3 \mapsto a,\ 4 \mapsto c,\ 5 \mapsto a.$$

A leképezés nyíldiagrammos ábrázolása:



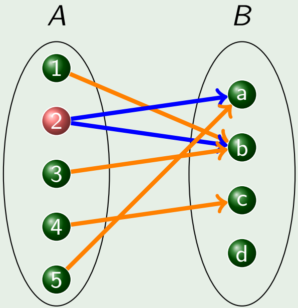
Egy $\varphi : A \to B$ leképezés nyíldiagrammjában minden A-beli pontból pontosan egy nyíl indul ki.

Példa:

Legyen $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{a, b, c, d\}$, és legyen

$$\varphi_2 = \{(1, b), (2, a), (2, b), (3, b), (4, c), (5, a)\}.$$

Ekkor φ_2 A-ból B-be definiált megfeleltetés, de nem leképezés, mivel a 2 elemnek két képe van a megfeleltetésben.

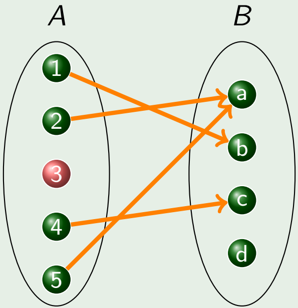


Példa:

Legyen $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{a, b, c, d\}$, és legyen

$$\varphi_3 = \{(1, b), (2, a), (4, c), (5, a)\}.$$

Ekkor φ_3 A-ból B-be definiált megfeleltetés, de nem leképezés, mivel a 3 elemnek nincs képe a megfeleltetésben.



Számhalmazok között definiált leképezést képlettel is definiálhatjuk:

Példa:

Legyen $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = x^2$. Ekkor a φ leképezés az összes lehetséges (x, x^2) alalakú pontpárokat tartalmazza, azaz egy x valós szám képe az x^2 képletű valós szám.
A φ leképezés értékkészlete az $R(\varphi) = [0, \infty)$ intervallum.

Használhatjuk az alábbi jelölést is a leképezés megadására:

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto x^2.$$

Az alábbi példákban a függvény fogalmát az analízisben megszokott általánosabb értelemben használjuk:

Példa:

Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{x}$ (vagy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{x}$).
Ekkor f egy függvény, amelynek értelmezési tartománya $D(f) = [0, \infty)$, értékkészlete $R(f) = [0, \infty)$.

Legyen $g : [0, \infty) \to [0, \infty),\ g(x) = \sqrt{x}$ (vagy $g : [0, \infty) \to [0, \infty),\ x \mapsto \sqrt{x}$).
Ekkor g egy leképezés, amelynek értelmezési tartománya $D(g) = [0, \infty)$, értékkészlete $R(g) = [0, \infty)$.

Definíció:

Két leképezést azonosnak tekintünk, ha az indulási halmazuk, az érkezési halmazuk és a hozzárendelési szabályuk is azonos.

A fenti példában szereplő f és g leképezések (függvények) nem azonosak.

Leképezéseket szövegesen is definiálhatunk.

Példa:

Legyen A a jelen kurzus hallgatóinak halmaza, és jelölje $\psi_1(a)$ az a hallgató életkorát. Ekkor $\psi_1 : A \to \mathbb{N}$ alakú leképezés.

Példa:

Legyen X az adott félévben meghirdetett kurzusok halmaza, és jelölje $\psi_2(x)$ az x kurzust felvevő hallgatók létszámát (a regisztrációs időszak lezárásakor). Ekkor $\psi_1 : X \to \mathbb{N}_0$ alakú leképezés.

Példa:

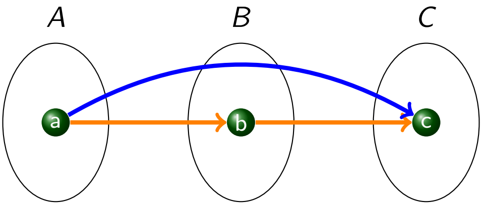
Legyen Y egy üzem dolgozóinak a halmaza, és jelölje $\psi_3(y)$ az y dolgozó anyja nevét.

Definíció:

Legyen $\varphi : A \to B$ és $\psi : B \to C$ leképezések. Ekkor a φ és ψ leképezések szorzatán vagy kompozícióján a

$$\psi \circ \varphi : A \to C, \qquad (\psi \circ \varphi)(x) = \psi(\varphi(x))$$

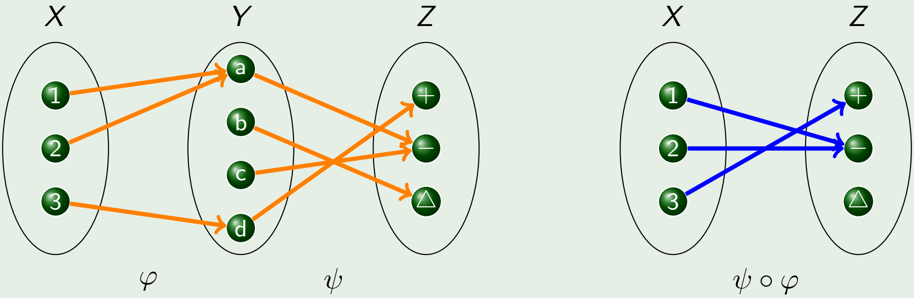
képlettel definiált leképezést értjük. A $\psi \circ \varphi$ függvényt összetett függvénynek is hívjuk, ahol φ a belső függvény, a ψ pedig a külső függvény.



A $\psi \circ \varphi$ szorzat leképezés egy $a \in A$ elemhez a $c \in C$ elemet rendeli, ha $b = \varphi(a)$ és $c = \psi(b)$.

Példa:

Legyen $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{a, b, c, d\}$ és $Z = \{+, -, \triangle\}$.
A $\varphi = \{(1, a), (2, a), (3, d)\}$ és $\psi = \{(a, -), (b, \triangle), (c, -), (d, +)\}$ leképezések szorzata a $\psi \circ \varphi : X \to Z$, $\quad \psi \circ \varphi = \{(1, -), (2, -), (3, +)\}$ leképezés.



Megjegyezzük, hogy a $\varphi \circ \psi$ szorzat nem definiált.

Példa:

Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, és $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 3x - 1$. Ekkor

$$(g \circ f)(x) = 3x^2 - 1, \qquad (f \circ g)(x) = (3x - 1)^2.$$

Példa:

Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$, és $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 2^x$. Ekkor

$$(g \circ f)(x) = 2^{\sin x}, \qquad (f \circ g)(x) = \sin 2^x.$$

Legyen A egy halmaz.

Definíció:

Az $A \to A$, $a \mapsto a$ leképezést az A-n definiált identikus leképezésnek hívjuk, és id_A-val vagy egyszerűen id-del jelöljük. Ekkor $\mathrm{id}_A(x) = x$ minden $x \in A$-ra.

Könnyen ellenőrizhető, hogy

Tétel:

ha $\varphi : A \to B$ leképezés, akkor

$$\varphi \circ \mathrm{id}_A = \varphi, \qquad \mathrm{id}_B \circ \varphi = \varphi.$$

Definíció:

Valós számok egy $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ *végtelen sorozatán egy* $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *leképezést értünk.*
(Egy $\mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ *leképezést pedig az* $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ *jelöléssel szokás leírni.)*

Definíció:

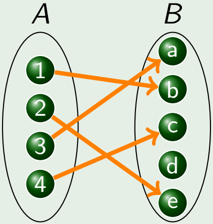
Valós számok egy $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ *véges sorozatán egy* $\{1, 2, \ldots, n\} \to \mathbb{R}$ *leképezést értünk.*
(Hasonlóan, az $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ *jelölésen egy* $\{0, 1, 2, \ldots, n\} \to \mathbb{R}$ *leképezést értünk.)*

Definíció:

Azt mondjuk, hogy $\varphi : A \to B$ injektív leképezés vagy injekció vagy kölcsönösen egyértelmű leképezés, ha minden B-beli elemnek legfeljebb egy őse van. (Azaz különböző A-beli elemeknek különböző a képe.)

Példa:

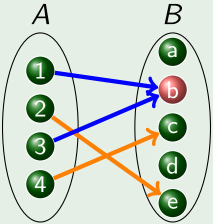
Legyen $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, c, d, e\}$, és $\varphi_1 = \{(1, b), (2, e), (3, a), (4, c)\}$. Ekkor φ_1 injektív leképezés, mivel különböző elemeknek különböző a képe.



Egy injektív leképezésnél minden B-beli pontba legfeljebb egy nyíl mutat.

Példa:

Legyen $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, c, d, e\}$, és
$\varphi_2 = \{(1, b), (2, e), (3, b), (4, c)\}$. Ekkor φ_2 leképezés, de nem injektív, mivel $\varphi_2(1) = b = \varphi_2(3)$, azaz a b elemnek két különböző őse van.



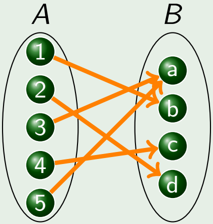
Egy nem injektív leképezésnél van olyan B-beli pont, ahova legalább két nyíl mutat.

Definíció:

Azt mondjuk, hogy $\varphi : A \to B$ szürjektív leképezés vagy szürjekció vagy ráképezés, ha minden B-beli elemnek van őse. Azaz φ szürjektív, ha $R(\varphi) = B$.

Példa:

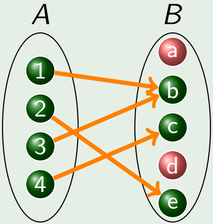
Legyen $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{a, b, c, d\}$, és $\varphi_3 = \{(1, b), (2, d), (3, a), (4, c), (5, a)\}$. Ekkor φ_3 szürjektív leképezés, mivel minden B-beli elemnek van őse, azaz $R(\varphi_3) = B$.



Egy szürjektív leképezésnél minden B-beli pontba mutat nyíl.

Példa:

Legyen $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, c, d, e\}$, és $\varphi_2 = \{(1, b), (2, e), (3, b), (4, c)\}$. Ekkor φ_2 leképezés, de nem szürjektív, mivel az a és d elemeknek nincs őse, azaz $R(\varphi_2) = \{b, c, e\}$.



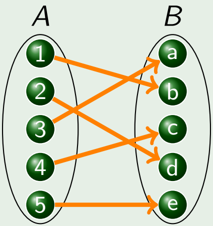
Egy nem szürjektív leképezés nyíldiagrammjában létezik olyan B-beli pont, ahova nem mutat nyíl.

Definíció:

Azt mondjuk, hogy $\varphi : A \to B$ bijektív leképezés vagy bijekció vagy kölcsönösen egyértelmű ráképezés, ha injektív és szürjektív. (Azaz minden B-beli elemnek pontosan egy őse van.)

Példa:

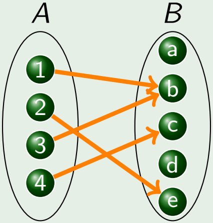
Legyen $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{a, b, c, d, e\}$, és
$\varphi_4 = \{(1, b), (2, d), (3, a), (4, c), (5, e)\}$. Ekkor φ_4 bijektív leképezés, mivel injektív és szürjektív is.



Egy bijektív leképezésnél minden B-beli pontba pontosan egy nyíl mutat.

Példa:

Legyen $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, c, d, e\}$, és
$\varphi_2 = \{(1, b), (2, e), (3, b), (4, c)\}$. Ekkor φ_2 leképezés, de nem bijektív, mivel se nem injektív és se nem szürjektív.



Példa:

Tekintsük az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^3$ függvényt. Ekkor f injektív és szürjektív is, azaz bijektív leképezés.

Példa:

Tekintsük a $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin x$ függvényt. Ekkor g nem injektív és nem szürjektív.

Példa:

Tekintsük a $h : \mathbb{R} \to [-1, 1], \quad h(x) = \sin x$ függvényt. Ekkor h nem injektív, de szürjektív.

Példa:

Tekintsük a $k : [0, \pi/2] \to [0, 1], \quad k(x) = \sin x$ függvényt. Ekkor k injektív és szürjektív is, azaz bijektív.

Tétel:

Legyen $\varphi : A \to B$, $\psi : B \to C$ leképezések. Ekkor

1. *ha φ és ψ injektív, akkor $\psi \circ \varphi$ is injektív;*
2. *ha φ és ψ szürjektív, akkor $\psi \circ \varphi$ is szürjektív;*
3. *ha φ és ψ bijektív, akkor $\psi \circ \varphi$ is bijektív.*

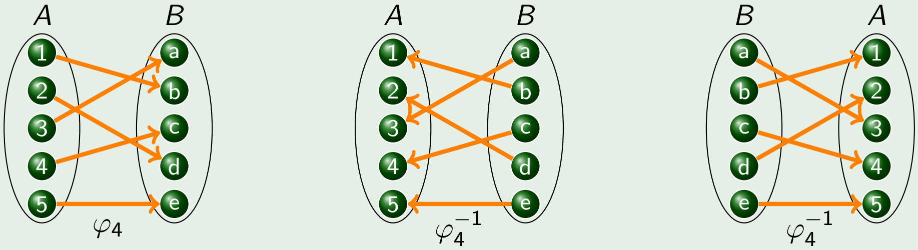
Definíció:

Legyen $\varphi : A \to B$ bijektív leképezés. Ekkor definiáljuk a $\varphi^{-1} : B \to A$ leképezést a következő módon: legyen $\varphi^{-1}(b) = a$, akkor és csak akkor, ha $\varphi(a) = b$. Ezt a leképezést a φ leképezés inverzének nevezzük.

Példa:

Legyen $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{a, b, c, d, e\}$, és tekintsük a $\varphi_4 = \{(1, b), (2, d), (3, a), (4, c), (5, e)\}$ leképezést. Mivel φ_4 bijektív leképezés, definiálható az inverze:

$$\varphi_4^{-1} : B \to A, \quad \varphi_4^{-1} = \{(b, 1), (d, 2), (a, 3), (c, 4), (e, 5)\}.$$



Tétel:

Legyen $\varphi : A \to B, \psi : B \to C$ *bijektív leképezések. Ekkor*

1. φ^{-1} *is bijektív leképezés,*
2. $\varphi^{-1} \circ \varphi = \mathrm{id}_A$ *és* $\varphi \circ \varphi^{-1} = \mathrm{id}_B$*,*
3. $(\varphi^{-1})^{-1} = \varphi, \quad (\psi \circ \varphi)^{-1} = \varphi^{-1} \circ \psi^{-1}$.