Halmazok

Összeállította: dr. Leitold Adrien
egyetemi docens

Halmazok

- Alapfogalmak: halmaz, halmaz eleme
  Jelölés: A , $a \in A$
- Üres halmaz: nincs egyetlen eleme sem. Jel.: $\emptyset$, $\{\ \}$,
- Egyenlő halmazok: $A = B$, ha a két halmaznak az elemei ugyanazok.
- Részhalmaz: Az A halmaz részhalmaza a B halmaznak, ha A minden eleme eleme B-nek is. Jel.: $A \subseteq B$
- Valódi részhalmaz: Az A halmaz valódi részhalmaza a B halmaznak, ha $A \subseteq B$ és B-nek van olyan eleme, amely nem eleme az A halmaznak. Jel.: $A \subset B$
- Bármely A halmaz esetén:

$$A \subseteq A$$

$$\emptyset \subseteq A$$

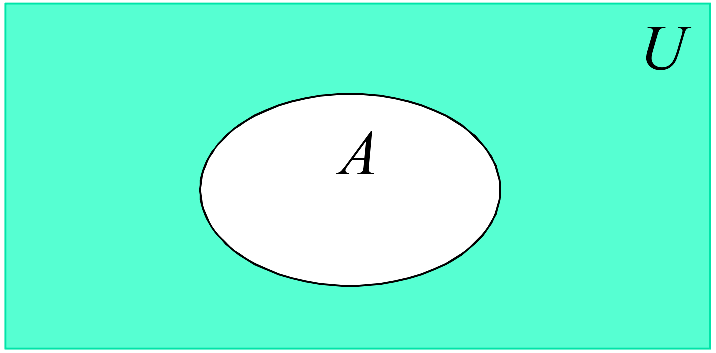
$$A \subseteq B \text{ és } B \subseteq A \quad \Leftrightarrow \quad A = B$$

Halmazműveletek: komplementer

- Komplementer: Legyen U az alaphalmaz, univerzum.

  Az A halmaz U-ra vonatkozó komplementer halmaza az U azon elemeit tartalmazza, amelyek nem elemei A-nak:

$$\overline{A} = \{x \mid x \notin A\} .$$



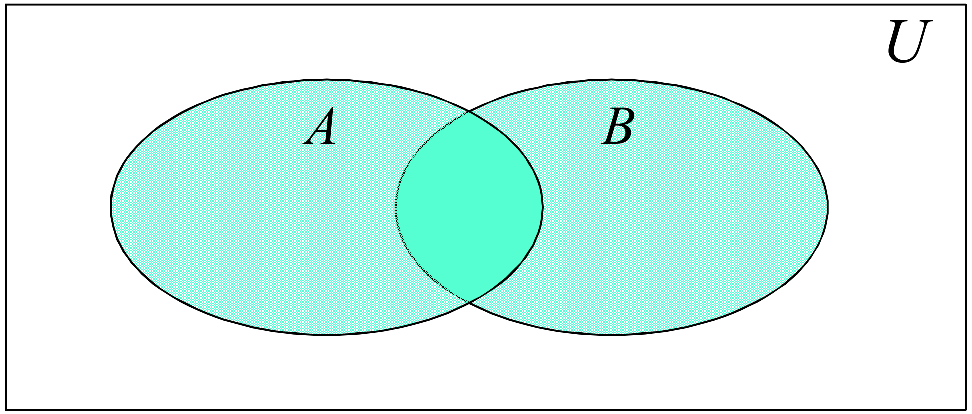
- Tulajdonságai:

$$\overline{\overline{A}} = A , \quad \overline{U} = \varnothing , \quad \overline{\varnothing} = U .$$

Halmazműveletek: unió

- Unió (egyesítés):

$$A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ vagy } x \in B \}$$



- Tulajdonságai:

$$A \cup B = B \cup A$$

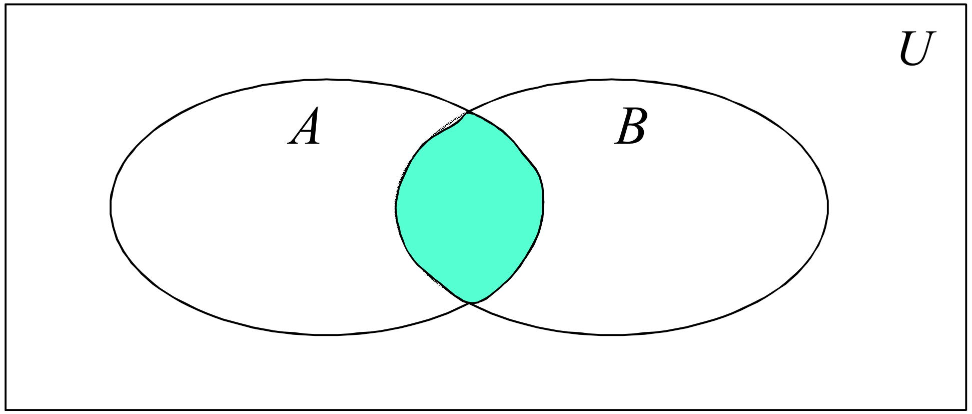
$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

$$A \cup A = A, \quad A \cup \emptyset = A, \quad A \cup U = U,$$

Halmazműveletek: metszet

- Metszet (közös rész):

$$A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ és } x \in B \}$$



- Tulajdonságai: $A \cap B = B \cap A$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

$$A \cap A = A, \quad A \cap \varnothing = \varnothing, \quad A \cap U = A.$$

- Diszjunkt halmazok: A és B diszjunkt, ha nincs közös elemük, azaz $A \cap B = \varnothing$.

Halmazműveletek: további tulajdonságok

- Tulajdonságok:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cap B} \qquad De\ Morgan$$

$$\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B} \qquad De\ Morgan$$

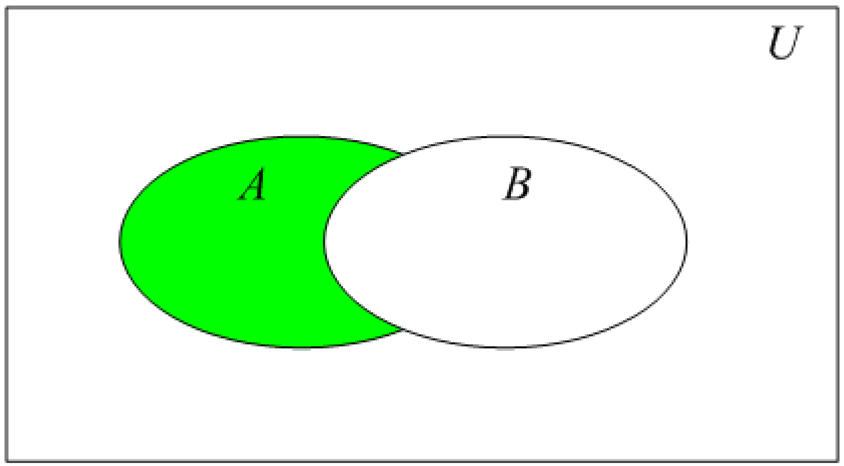
Halmazműveletek: különbség

- Különbség: Az A és B halmaz különbsége olyan elemeket tartalmaz, amelyek elemei A-nak, de nem elemei B-nek:

$$A \setminus B = \{ x \mid x \in A \text{ és } x \notin B \}$$

Azaz:

$$A \setminus B = A \cap \overline{B}$$



Halmazok elemszáma

- Az A halmaz elemszáma: jel.: $|A|$
- Halmazok:
  - véges halmazok: elemek száma véges
  - végtelen halmazok: elemek száma végtelen

- Logikai szita:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| +$$
$$+ |A \cap B \cap C|$$
$$\ldots$$

Számhalmazok

- Természetes számok: $\mathbf{N} = \{ 0, 1, 2, \ldots \}$
- Egész számok: $\mathbf{Z} = \{ \ldots, -1, -2, 0, 1, 2, \ldots \}$
- Racionális számok: $\mathbf{Q}$: két egész szám hányadosaként felírható számok; tizedes tört alakjuk véges, vagy végtelen periodikus.
- Irracionális számok: $\mathbf{Q}^*$: nem írhatóak fel két egész szám hányadosaként; tizedes tört alakjuk végtelen, nem periodikus. Például: $\pi, \sqrt{2}$
- Valós számok: $\mathbf{R} = \mathbf{Q} \cup \mathbf{Q}^*$

  ábrázolásuk számegyenesen történhet
- Intervallumok: $[a,b]$, (a,b) , $[a,\infty)$, $[a,b)$, ...

Logika elemei

- Kijelentések közti kapcsolatok:

  Implikáció: $A \Rightarrow B$

  Ekvivalencia: $A \Leftrightarrow B$

- Logikai kvantorok:

  Univerzális kvantor: „minden, bármely” Jel.: $\forall$

  Egzisztenciális kvantor: „létezik” Jel.: $\exists$