Mátrixok

Összeállította: dr. Leitold Adrien
egyetemi docens

Mátrix

- Mátrix: téglalap alakú számtáblázat

$$A_{mxn} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Jelölés: A , $A_{m\text{x}n}$, $(a_{ij})_{m\text{x}n}$

- Mátrix típusa (rendje): m x n , $A \in R^{m\,x\,n}$
  - m: sorok száma
  - n: oszlopok száma
- Mátrix $(i\,,j)$-edik eleme: a_{ij}
  - i: sorindex $i = 1, \dots, m$
  - j: oszlopindex $j = 1, \dots, n$

Egyenlő mátrixok, mátrix transzponáltja

- Két mátrix egyenlő, ha típusuk megegyezik és a megfelelő elemeik rendre megegyeznek.
- Mátrix transzponáltja: Az A m x n-es mátrix transzponáltján azt az n x m–es mátrixot értjük, amelynek (i,j)-edik eleme egyenlő az A mátrix (j,i)-edik elemével. Jel.: A^T

Megjegyzés: A transzponált mátrixot az eredeti A mátrixból a sorok és oszlopok felcserélésével kapjuk.

$$A_{mxn} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \Rightarrow A^T_{nxm} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Speciális mátrixok

- Sorvektor: (1 x n)-es mátrix, Jel.: $\underline{a} = (a_1,\ldots,a_n)$
- Oszlopvektor: (n x 1)-es mátrix,

  Jel.:

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

- Négyzetes mátrix: (n x n)-es mátrix

$$A_{nxn} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

főátló (fődiagonál):

$a_{11}, a_{22}, \ldots , a_{nn}$

Speciális mátrixok (folyt.)

- Diagonális mátrix: olyan négyzetes mátrix, amelynek a főátlón kívüli elemei mind nullák.

$$A_{nxn} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \operatorname{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$$

- Szimmetrikus mátrix: olyan $A=(a_{ij})_{n\text{x}n}$ négyzetes mátrix, melyben $a_{ij}= a_{ji}$ $\; i,j = 1,\dots,n.$

  Megjegyzés:

$$A \text{ szimmetrikus} \iff A = A^T$$

Speciális mátrixok (folyt.)

- Egységmátrix: olyan diagonális mátrix, amelynek főátlójában egyesek állnak.

$$E_{nxn} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

- Nullmátrix: olyan mátrix, amelynek minden eleme nulla.

$$0_{mxn} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Mátrixműveletek

- Mátrixok összeadása:

  Legyen $A = (a_{ij})_{mxn}$ és $B = (b_{ij})_{mxn}$ két azonos méretű mátrix. Ekkor A és B összege:

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{mxn}$$

- Mátrix skalárral való szorzása:

  Legyen $A = (a_{ij})_{mxn}$ és $\lambda \in R$. Ekkor az A mátrix λ-szorosa:

$$\lambda \cdot A = (\lambda \cdot a_{ij})_{mxn}$$

- Két mátrix különbsége: származtatott művelet

$$A - B = A + (-1) \cdot B = (a_{ij} - b_{ij})_{mxn}$$

Az összeadás és a skalárral való szorzás tulajdonságai

- A mátrixösszeadás és skalárral való szorzás tulajdonságai:
  1. $(A + B) + C = A + (B + C)$
  2. $A + B = B + A$
  3. $A + 0 = A$
  4. $A + (-A) = 0$, ahol a $-A=(-1)\cdot A$ mátrixot az A mátrix ellentettjének nevezzük.
  5. $(\lambda+\mu)\cdot A = \lambda\cdot A + \mu\cdot A$
  6. $\lambda\cdot(A + B) = \lambda\cdot A + \lambda\cdot B$
  7. $\lambda\cdot(\mu\cdot A) = (\lambda\cdot\mu)\cdot A$
  8. $1\cdot A = A$

Mátrixműveletek (folyt.)

- Mátrixok szorzása:

Legyenek $A = (a_{ij})_{mxn}$ és $B = (b_{jk})_{nxp}$ mátrixok. Ekkor az A és B mátrixok szorzata az a C mxp-s mátrix, amelynek (i,k)-adik eleme:

$$c_{ik} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nk}$$

Figyelem! Két mátrix összeszorozhatóságának feltétele, hogy az első mátrix oszlopainak száma megegyezzen a második mátrix sorainak számával.

- Mátrix hatványa: Ha A négyzetes mátrix, akkor

$A^n = A \cdot A \cdot \ldots \cdot A$ (n-szer szorozzuk A-t önmagával, ahol n pozitív egész)

A mátrixszorzás tulajdonságai

- A mátrixszorzás tulajdonságai:
  1. Általában: $A \cdot B \neq B \cdot A$ (nem kommutatív)
  2. Asszociatív, azaz ha az $A \cdot (B \cdot C)$ szorzat létezik, akkor az $(A \cdot B) \cdot C$ szorzat is létezik és
  $$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$$
  3. $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ (balról disztributív)
  4. $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$ (jobbról disztributív)
  5. Zérusosztós művelet, azaz két mátrix szorzata úgy is lehet nullmátrix, hogy a két mátrix egyike sem nullmátrix.
  6. $A_{mxn} \cdot 0_{nxp} = 0_{mxp}$, illetve $0_{mxn} \cdot A_{nxp} = 0_{mxp}$
  7. $A_{mxn} \cdot E_{nxn} = A_{mxn}$, illetve $E_{mxm} \cdot A_{mxn} = A_{mxn}$
  8. $(\lambda \cdot A) \cdot B = A \cdot (\lambda \cdot B)$

Mátrix oszlopvektorai

- Tekintsünk egy mátrixot!

$$A_{mxn} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- Oszlopvektorok: $A = [\underline{a}_1 \dots \underline{a}_n]$

ahol $\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \dots , \underline{a}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$

n darab m dimenziós oszlopvektor

Mátrix sorvektorai

- Tekintsünk egy mátrixot!

$$A_{mxn} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- Sorvektorok:

$$A_{mxn} = \begin{bmatrix} \underline{a}^1 \\ \vdots \\ \underline{a}^m \end{bmatrix}$$

ahol $\underline{a}^1 = (a_{11}, \dots, a_{1n})\,, \quad \dots \quad , \underline{a}^m = (a_{m1}, \dots, a_{mn})$

m darab n dimenziós sorvektor

Mátrix rangja

- Mátrix oszloprangja:

  Egy mátrix oszloprangján az oszlopvektoraiból álló vektorhalmaz rangját értjük, azaz ha

  $A_{mxn} = [\underline{a}_1 \ \ldots \ \underline{a}_n]$, akkor $r_o(A) = r(\{\underline{a}_1, \ \ldots \ ,\underline{a}_n\})$.

- Mátrix sorrangja:

  Egy mátrix sorrangján a sorvektoraiból álló vektorhalmaz rangját értjük, azaz ha

  $A_{mxn} = \begin{bmatrix} \underline{a}^1 \\ \vdots \\ \underline{a}^m \end{bmatrix}$, akkor $r_s(A) = r(\{\underline{a}^1, \ \ldots \ ,\underline{a}^m\})$.

- Igazolható, hogy bármely mátrix esetén a sor- és oszloprang megegyezik. Ezt a közös értéket röviden a mátrix rangjának nevezzük:

$$r(A) = r_s(A) = r_o(A)$$

A transzponálásra vonatkozó szabályok (állítások)

- A transzponálásra vonatkozó szabályok:
  - $(A^T)^T = A$
  - $(A + B)^T = A^T + B^T$
  - $(\lambda \cdot A)^T = \lambda \cdot A^T$
  - $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$
  - $r(A) = r(A^T)$

Négyzetes mátrix inverze

- Invertálhatóság, inverzmátrix:

  Legyen A egy nxn-es négyzetes mátrix. A-t invertálhatónak nevezzük, ha van olyan X nxn-es mátrix, melyre $A \cdot X = X \cdot A = E_{n\mathrm{x}n}$.

  Ekkor X-t az A mátrix inverzének hívjuk és A^{-1}-gyel jelöljük.

- Az invertálhatóság feltétele:

  Az A nxn-es mátrix invertálható $\Leftrightarrow r\,(A) = n$.

Mátrix invertálása bázistranszformációval

- Legyen $A_{n\mathrm{x}n} = [\underline{a}_1 \ \ldots \ \underline{a}_n]$ egy négyzetes mátrix. Ekkor az A^{-1} inverzmátrix az $\underline{e}_1, \ldots , \underline{e}_n$ kanonikus bázisvektoroknak az $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n$ vektorokra, mint bázisra vonatkozó koordinátáiból épül fel.

$$
\begin{array}{c|ccc:ccc}
 & \underline{a}_1 & \ldots & \underline{a}_n & \underline{e}_1 & \ldots & \underline{e}_n \\
\hline
\underline{e}_1 & & & & & & \\
\vdots & & \mathrm{A} & & & \mathrm{E} & \\
\underline{e}_n & & & & & &
\end{array}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{array}{c|ccc}
 & \underline{e}_1 & \ldots & \underline{e}_n \\
\hline
\underline{a}_1 & & & \\
\vdots & & \mathrm{A}^{-1} & \\
\underline{a}_n & & &
\end{array}
$$

Az invertálás szabályai (állítások)

- Az invertálás szabályai:

  Legyenek A és B invertálható nxn-es mátrixok. Ekkor:

  - A^{-1} invertálható és $(A^{-1})^{-1} = A$.
  - $A \cdot B$ invertálható és $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.
  - A^T invertálható és $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.
  - $\lambda \cdot A$ invertálható és $(\lambda \cdot A)^{-1} = 1/\lambda \cdot A^{-1}$, ahol λ nullától különböző valós szám.

Négyzetes mátrix determinánsa

- Részmátrix:

  Legyen $A = (a_{ij})$ nxn-es mátrix. Az A mátrix a_{ij} elemhez tartozó részmátrixán azt az (n-1)x(n-1)-es mátrixot értjük, amelyet az A mátrixból annak i-edik sorát és j-edik oszlopát elhagyva kapunk. Jel.: A_{ij}.

- Négyzetes mátrix determinánsa: (rekurzív definíció)

  1. Legyen $A = [a_{11}]$ 1x1-es mátrix. Ekkor A determinánsa: $det\,(A) = a_{11}$.
  2. Legyen $A = (a_{ij})$ nxn-es mátrix, ahol $n \geq 2$. Ekkor A determinánsa: (első sor szerinti kifejtés)

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j}\, det(A_{1j})$$

Négyzetes mátrix determinánsa (folyt.)

- A definícióból adódó észrevételek:
  - 2x2-es mátrix determinánsa:

    $$det\,(A) = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

    („főátlóbeli elemek szorzata mínusz mellékátlóbeli elemek szorzata”)

  - A determináns meghatározásának számolási igénye rohamosan növekszik a mátrix méretével.

  - Diagonális mátrix determinánsa egyenlő a főátlóbeli elemek szorzatával.

Sorok és oszlopok szerinti kifejtés tétele

- Egy négyzetes mátrix determinánsa bármelyik sor ill. oszlop szerint kifejtve megkapható.
  - Az i-edik sor szerinti kifejtés képlete:

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \, det(A_{ij})$$

  - A j-edik oszlop szerinti kifejtés képlete:

$$det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \, det(A_{ij})$$

- Következmény: $det\,(A) = det\,(A^T)$.

A determináns tulajdonságai (állítások)

A determináns tulajdonságai egyaránt igazak sorokra és oszlopokra megfogalmazva.

1. Ha a mátrix valamely oszlopában csupa nulla áll, akkor a determináns értéke 0.
2. Ha a mátrix két tetszőleges oszlopát felcseréljük, a determináns (-1)-szeresére változik.
3. Ha a mátrixban van két azonos oszlop, akkor a determináns értéke 0.
4. Legyen $A_{\mathrm{nxn}} = [\underline{a}_1 \ldots \underline{a}_j \ldots \underline{a}_n]$, ahol $\underline{a}_j = \underline{a}_j' + \underline{a}_j''$. Ekkor:

$$det(A) = det([\underline{a}_1 \ldots \underline{a}_j' \ldots \underline{a}_n]) + det([\underline{a}_1 \ldots \underline{a}_j'' \ldots \underline{a}_n]).$$

A determináns tulajdonságai (folyt.)

5. Legyen $A_{nxn} = [\underline{a}_1 \ldots \underline{a}_j \ldots \underline{a}_n]$, ahol $\underline{a}_j = \lambda \cdot \underline{a}_j'$. Ekkor:
$$det(A) = \lambda \cdot det([\underline{a}_1 \ldots \underline{a}_j' \ldots \underline{a}_n]).$$
6. Legyen A nxn-es mátrix és $\lambda \in R$. Ekkor:
$$det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \cdot det(A).$$
7. Ha a mátrix valamely oszlopához hozzáadjuk egy másik oszlop skalárszorosát (azaz ún. elemi oszlopátalakítást hajtunk végre), akkor a determináns értéke nem változik.
8. Szorzás-tétel: Legyenek A és B nxn-es mátrixok. Ekkor: $det(A \cdot B) = det(A) \cdot det(B)$.
9. Legyen A invertálható mátrix. Ekkor:
$$det(A^{-1}) = 1 / det(A).$$

Négyzetes mátrixok osztályozása

Nemszinguláris mátrixok

Az alábbi állítások ekvivalensek:

- oszlopvektorok lineárisan függetlenek
- $r(A_{nxn}) = n$ (a mátrix teljes rangú)
- invertálható
- $det(A) \neq 0$

Szinguláris mátrixok

Az alábbi állítások ekvivalensek:

- oszlopvektorok lineárisan összefüggőek
- $r(A_{nxn}) < n$ (a mátrix nem teljes rangú)
- nem invertálható
- $det(A) = 0$

A determináns alkalmazása 1.
Négyzetes mátrix adjungáltja és az inverzmátrix

- Négyzetes mátrix adjungáltja:

  Legyen $A = (a_{ij})_{nxn}$ egy négyzetes mátrix. Ekkor az A mátrix adjungáltja az az nxn-es mátrix, amelynek (i,j)-edik eleme: $(-1)^{i+j} \cdot det(A_{ji})$. Jel.: $adj(A)$

  Megjegyzés: A fenti definíció alapján levezethető, hogy egy 2x2-es mátrix adjungáltját megkaphatjuk úgy, hogy a főátlóban lévő elemeket megcseréljük, a mellékátlóban lévő elemeket pedig szorozzuk -1-gyel.

- Az adjungált és az inverzmátix kapcsolata:

  Legyen az A négyzetes mátrix invertálható. Ekkor:

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \cdot adj(A)$$

A determináns alkalmazása 2.
A vektoriális szorzat számolása

Legyen $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$ és $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3)$ két tetszőleges térbeli vektor. Ekkor az $\underline{a} \times \underline{b}$ vektoriális szorzat megkapható az alábbi determináns első sor szerinti formális kifejtésével:

$$\underline{a} \times \underline{b} = det\left(\begin{pmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}\right).$$