

Lineáris egyenletrendszerek

*Összeállította: dr. Leitold Adrien
egyetemi docens*

Lineáris egyenletrendszerek általános alakja

- Általános (részletes) alak:

$$a_{11} \cdot x_1 + \dots + a_{1n} \cdot x_n = b_1$$

$$a_{21} \cdot x_1 + \dots + a_{2n} \cdot x_n = b_2$$

m egyenlet
n ismeretlen: x_1, \dots, x_n

⋮

$$a_{m1} \cdot x_1 + \dots + a_{mn} \cdot x_n = b_m$$

- Jelölések:

$$\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \underline{a}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Lin. egyenletrendszerek általános alakja (folyt.)

- Tömörebb alak:

$$\underline{a}_1 \cdot x_1 + \underline{a}_2 \cdot x_2 + \dots + \underline{a}_n \cdot x_n = \underline{b}$$

- Jelölések:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n} \text{ együtthatómátrix,}$$

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

- Tömör alak:

$$A \cdot \underline{x} = \underline{b}$$

Homogén és inhomogén egyenletrendszerek

- Homogén egyenletrendszer:

Az $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$ lineáris egyenletrendszert homogénnek nevezünk, ha $\underline{b} = \underline{0}$.

- Inhomogén egyenletrendszer:

Az $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$ lineáris egyenletrendszert inhomogénnek nevezünk, ha $\underline{b} \neq \underline{0}$.

- Megjegyzés:

Az $A \cdot \underline{x} = \underline{0}$ homogén lineáris egyenletrendszer mindig megoldható, az $\underline{x} = \underline{0}$ megoldásvektort **triviális megoldásnak** nevezük.

A megoldhatóság feltétele

- Lineáris egyenletrendszerek megoldhatóságának szükséges és elégséges feltétele:

Az $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$ lin. egyenletrendszer megoldható \Leftrightarrow

$$r(A) = r([A, \underline{b}]),$$

ahol $[A, \underline{b}]$ az egyenletrendszer **kibővített**

mátrixa:

$$[A, \underline{b}] = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}_{m \times (n+1)} .$$

Lin. egyenletrendszer „megoldó

$$\underline{x}_B = \underline{d} - \underline{D} \cdot \underline{x}_R$$

„megoldó képlet”

- \underline{x}_B : **kötött ismeretlenek vektora**; a bázisba bevont \underline{a} vektorokhoz tartozó ismeretlenek lesznek a kötött ismeretlenek;
- \underline{x}_R : **szabad ismeretlenek vektora**; a bázisba nem bevont \underline{a} vektorok lesznek a szabad ismeretlenek;
- \underline{d} : a \underline{b} vektornak a bázisba bevont \underline{a} vektorokra vonatkozó koordinátáiból felépülő vektor;
- \underline{D} : a bázisba nem bevont \underline{a} vektoroknak a bázisban lévő \underline{a} vektorokra vonatkozó koordinátáiból felépülő mátrix.

Megoldásvektorok száma

- Homogén lin. egyenletrendszer megoldásvektorainak számára vonatkozó állítások:
 1. Az $A \cdot \underline{x} = \underline{o}$ homogén lin. egyenletrendszernek csak triviális megoldása van $\Leftrightarrow r(A) = n$, ahol n az ismeretlenek száma.
 2. Az $A \cdot \underline{x} = \underline{o}$ homogén lin. egyenletrendszernek van triviálistól különböző megoldása is $\Leftrightarrow r(A) < n$, ahol n az ismeretlenek száma.

Megjegyzés: ebben az esetben az egyenletrendszernek végtelen sok megoldásvektora van.

Homogén-inhomogén egyenletrendszer-pár

- Homogén-inhomogén egyenletrendszer megoldás-

halmazai közötti kapcsolat:

Tekintsük az $A \cdot \underline{x} = \underline{o}$ és $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$ homogén-inhomogén egyenletrendszer-párt. Jelölje

- M_0 a homogén egyenletrendszer megoldáshalmazát,
- M az inhomogén egyenletrendszer megoldáshalmazát,
- \underline{x}_0 az inhomogén egyenletrendszer egy rögzített megoldásvektorát.

Ekkor: $M = M_0 + \{\underline{x}_0\}$.

Lineáris egyenletrendszerek:

összefoglalás

Megoldásvektorok száma	Homogén lin. e.r. $A_{m \times n} \cdot \underline{x} = \underline{o}$	Inhomogén lin. e.r. $A_{m \times n} \cdot \underline{x} = \underline{b}$
Nincs megoldás (Az e. r. nem oldható meg.)	-----	$r(A) < r([A, \underline{b}])$ $M = \emptyset$
1 db. megoldásvektor (Az e.r. egyértelműen megoldható.)	$r(A) = n$ $M_0 = \{\underline{o}\}$	$r(A) = r([A, \underline{b}]) = n$ $M = \{\underline{x}_0\}$
Végtelen sok megoldásvektor	$r(A) < n$ M_0	$r(A) = r([A, \underline{b}]) < n$ $M = M_0 + \{\underline{x}_0\}$