



Az R^n vektortér

*Összeállította: dr. Leitold Adrien
egyetemi docens*



Rendezett szám n-esek

- Rendezett szám n-esek:
 - $\underline{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$
 - $a_1, a_2, \dots, a_n \in R$, a rendezett szám n-es komponensei
- R^n : a valós számokból képezett rendezett szám n-esek halmaza
- Két rendezett szám n-es egyenlő, ha a megfelelő komponenseik megegyeznek.



Műveletek rendezett n-esekkel

- Alapműveletek:

- Két rendezett n-es összege:

Ha $\underline{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ és $\underline{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in R^n$, akkor

$$\underline{a} + \underline{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n).$$

- Egy rendezett n-es λ -szorososa:

Ha $\underline{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in R^n$ és $\lambda \in R$, akkor

$$\lambda \cdot \underline{a} = (\lambda \cdot a_1, \lambda \cdot a_2, \dots, \lambda \cdot a_n).$$

- Két rendezett n-es különbsége: (származtatott művelet)

$$\underline{a} - \underline{b} = \underline{a} + (-1) \cdot \underline{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, \dots, a_n - b_n).$$

Az alapműveletek tulajdonságai

- Legyenek \underline{a} , \underline{b} és $\underline{c} \in R^n$ tetszőleges rendezett n-esek, valamint $\lambda, \mu \in R$ tetszőleges valós számok. Ekkor:
 1. $(\underline{a} + \underline{b}) + \underline{c} = \underline{a} + (\underline{b} + \underline{c})$ (asszociativitás)
 2. $\underline{a} + \underline{b} = \underline{b} + \underline{a}$ (kommutativitás)
 3. Létezik olyan $\underline{o} \in R^n$ rendezett n-es, hogy bármely $\underline{a} \in R^n$ esetén $\underline{a} + \underline{o} = \underline{a}$. (nullelem létezése)
 4. Bármely $\underline{a} \in R^n$ esetén létezik olyan $\underline{a}' \in R^n$, hogy $\underline{a} + \underline{a}' = \underline{o}$, ahol $\underline{a}' = (-1) \cdot \underline{a}$, az \underline{a} ellentettje. (ellentett létezése)
 5. $(\lambda + \mu) \cdot \underline{a} = \lambda \cdot \underline{a} + \mu \cdot \underline{a}$
 6. $\lambda \cdot (\underline{a} + \underline{b}) = \lambda \cdot \underline{a} + \lambda \cdot \underline{b}$
 7. $\lambda \cdot (\mu \cdot \underline{a}) = (\lambda \cdot \mu) \cdot \underline{a}$
 8. $1 \cdot \underline{a} = \underline{a}$



Az R^n vektortér

Megjegyzés:

- Mivel az $(R^n, +, \cdot)$ algebrai struktúrában teljesül a vektorterekre jellemző előző nyolc alaptulajdonság (vektortér-axiómák), ezért R^n -t **n-dimenziós valós vektortérnek** vagy **n-dimenziós euklideszi vektortérnek** nevezzük, R^n elemeit **n-dimenziós vektoroknak** hívjuk.



Lineáris kombináció

■ Vektorok lineáris kombinációja

Legyenek $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_k$ n -dimenziós vektorok és $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ skalárok.

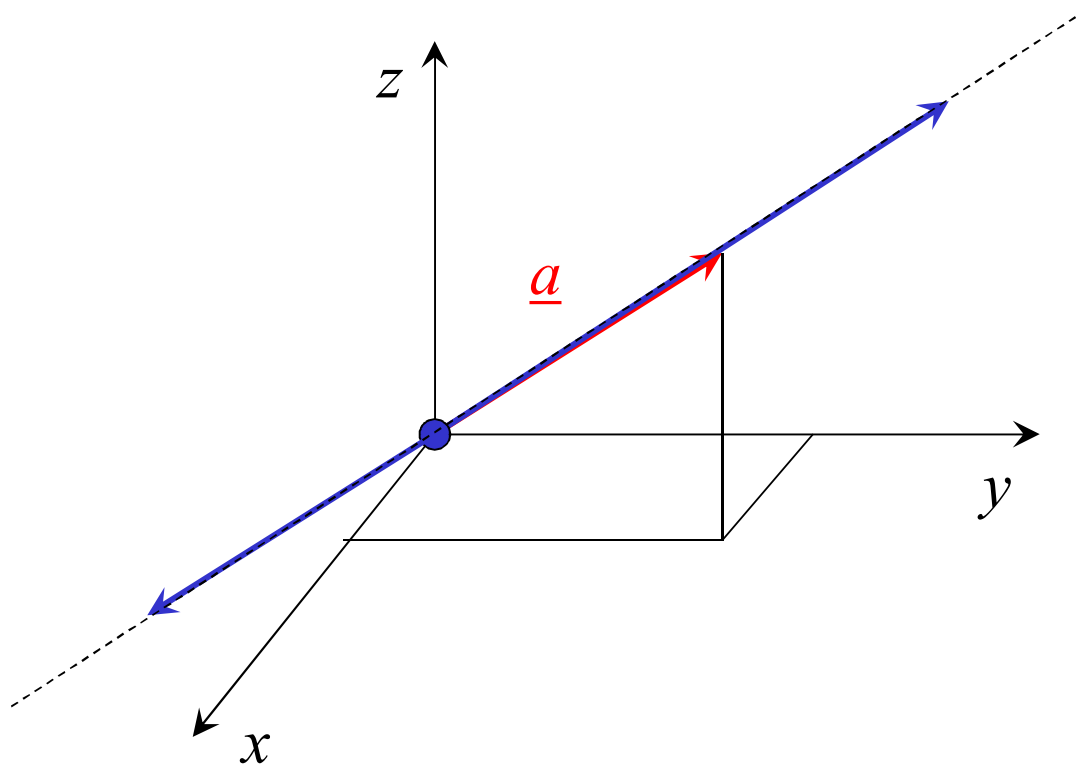
Ekkor a $\lambda_1 \cdot \underline{a}_1 + \lambda_2 \cdot \underline{a}_2 + \dots + \lambda_k \cdot \underline{a}_k \in R^n$ vektort az $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k$ vektorok $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ skalárokkal vett lineáris kombinációjának nevezzük.

■ Triviális lineáris kombináció

Ha a lineáris kombinációban az összes skalár nulla, akkor triviális lineáris kombinációról beszélünk.

Triviális lineáris kombináció eredménye (bármilyen $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k$ vektorok esetén) mindig nullvektor.

Lineáris kombináció geometriai szemléltetése 1.



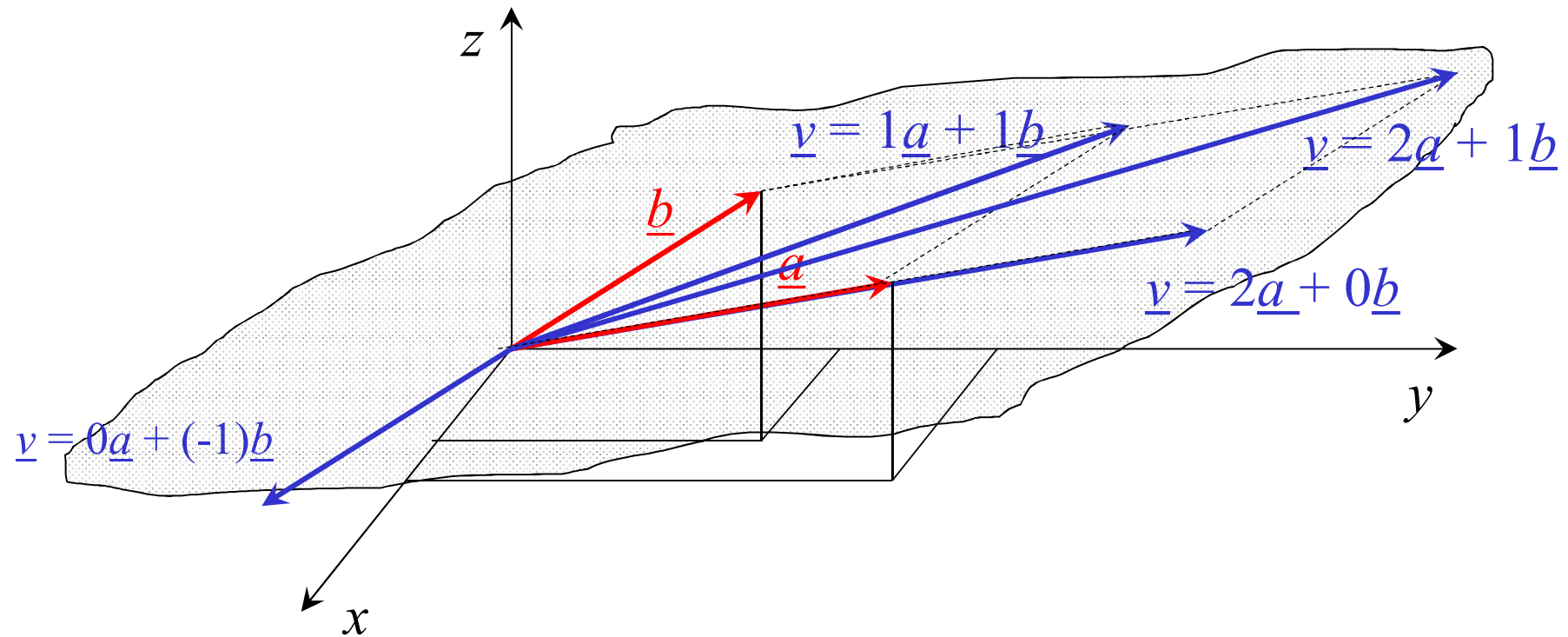
$$\underline{v} = 2\underline{a}$$

$$\underline{v} = 0\underline{a}$$

$$\underline{v} = -1\underline{a}$$

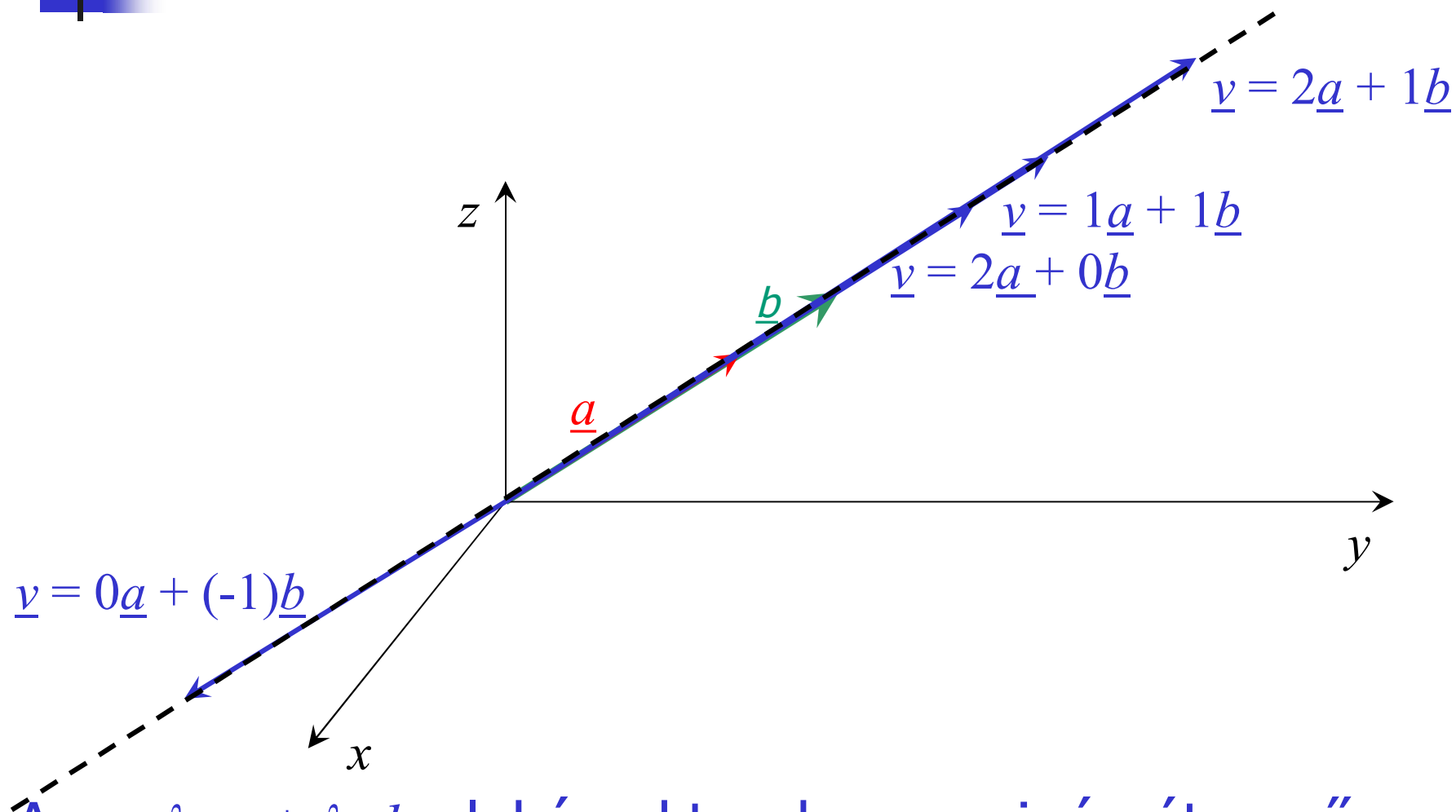
A $\underline{v} = \lambda \cdot \underline{a}$ alakú vektorok egy origón átmenő \underline{a} irányvektorú egyenesre esnek.

Lineáris kombináció geometriai szemléltetése 2.



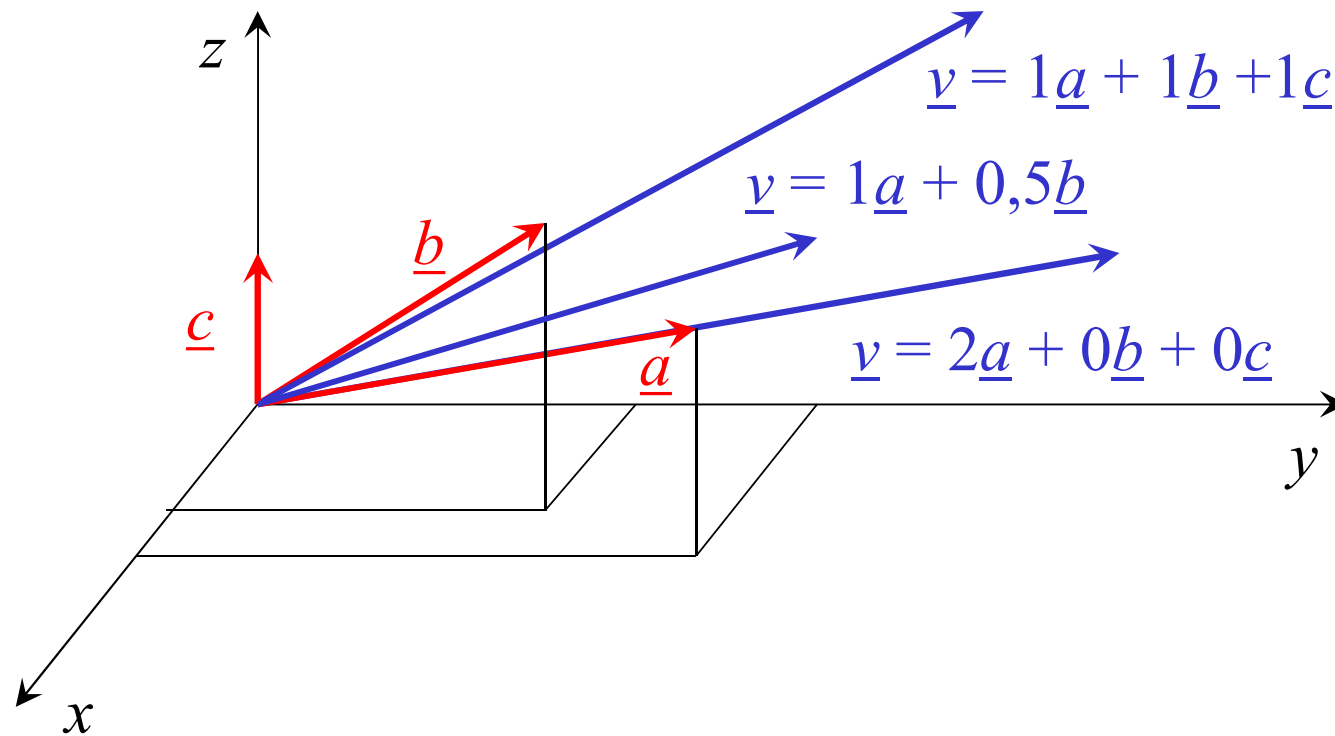
A $\underline{v} = \lambda_1 \cdot \underline{a} + \lambda_2 \cdot \underline{b}$ alakú vektorok egy origón átmenő \underline{a} és \underline{b} által kifeszített síkra esnek.

Lineáris kombináció geometriai szemléltetése 3.



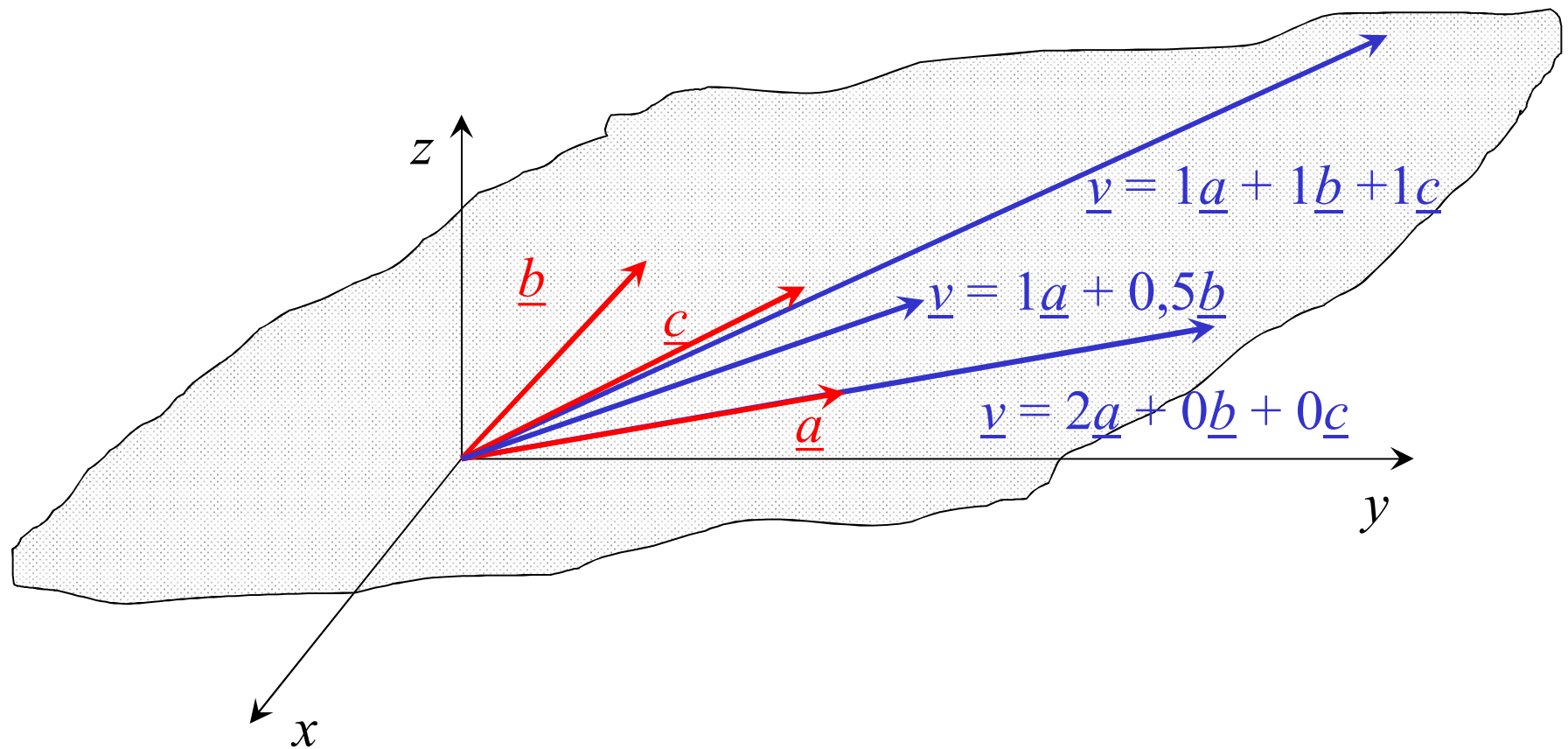
A $\underline{v} = \lambda_1 \cdot \underline{a} + \lambda_2 \cdot \underline{b}$ alakú vektorok egy origón átmenő egyenesre esnek, amelynek az irányvektora az \underline{a} vagy a \underline{b} vektor.

Lineáris kombináció geometriai szemléltetése 4.



A $\underline{v} = \lambda_1 \cdot \underline{a} + \lambda_2 \cdot \underline{b} + \lambda_3 \cdot \underline{c}$ alakú vektorok kitöltik a teljes teret.

Lineáris kombináció geometriai szemléltetése 5.



A $\underline{v} = \lambda_1 \cdot \underline{a} + \lambda_2 \cdot \underline{b} + \lambda_3 \cdot \underline{c}$ alakú vektorok az origón átmenő \underline{a} és \underline{b} által kifeszített síkra esnek.



Lineáris függetlenség és összefüggőség

- Lineárisan független vektorok:

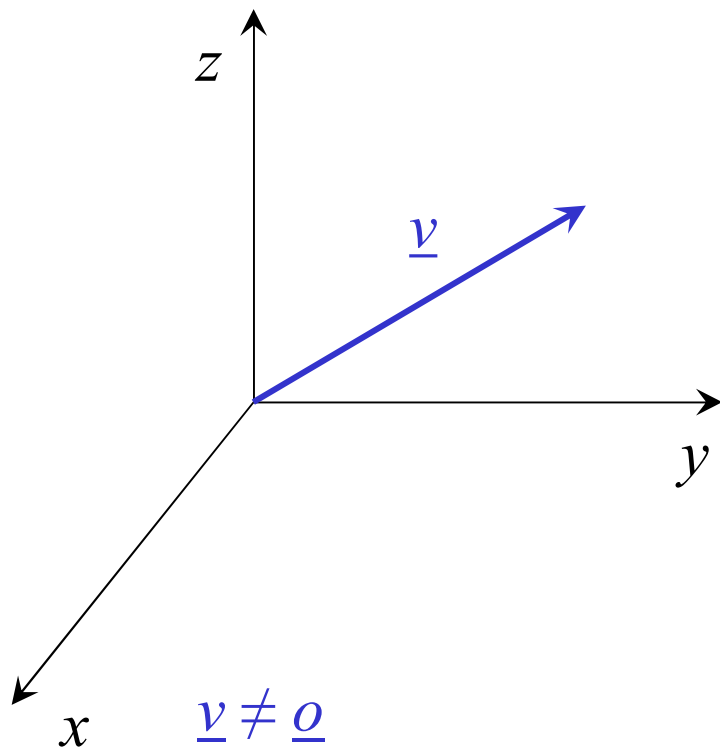
Az $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k \in R^n$ vektorokat lineárisan függetleneknek nevezzük, ha belőlük csak triviális lineáris kombinációval (csupa nulla együtthatóval) állítható elő a nullvektor.

- Lineárisan összefüggő vektorok:

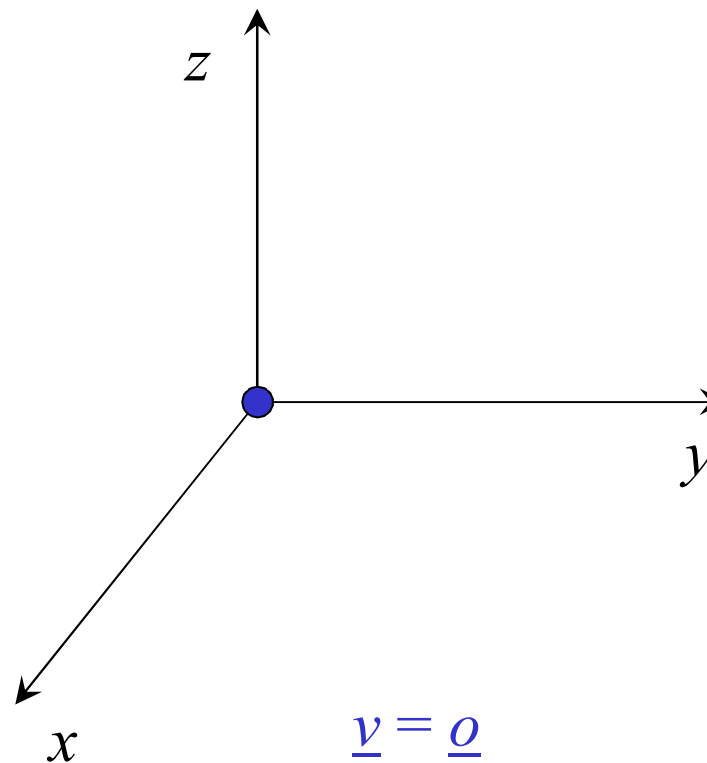
Az $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k \in R^n$ vektorokat lineárisan összefüggőeknek hívjuk, ha belőlük nem triviális lineáris kombinációval is előállítható a nullvektor.

Lin. függetlenség és összefüggőség geometriai szemléltetése az R^3 térben

- 1 vektor esetén



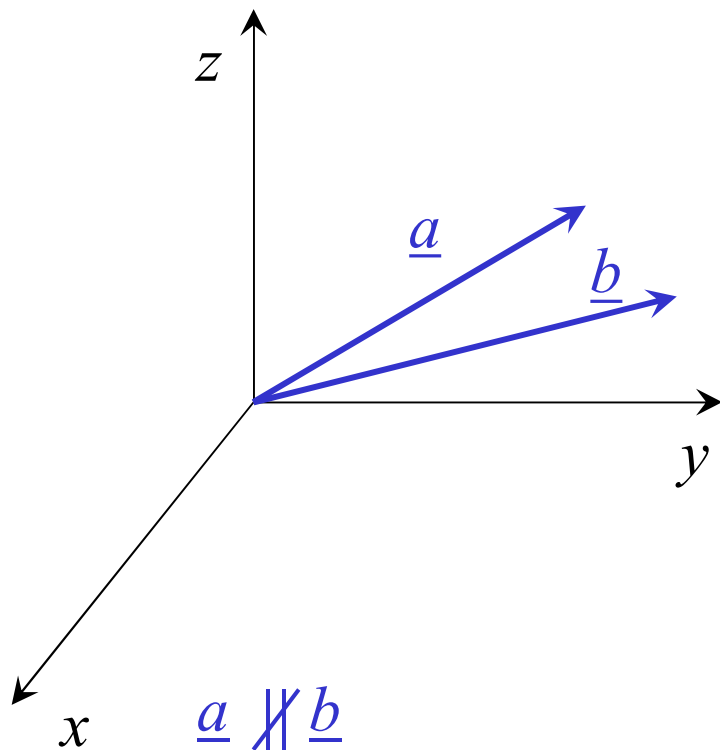
lineárisan független



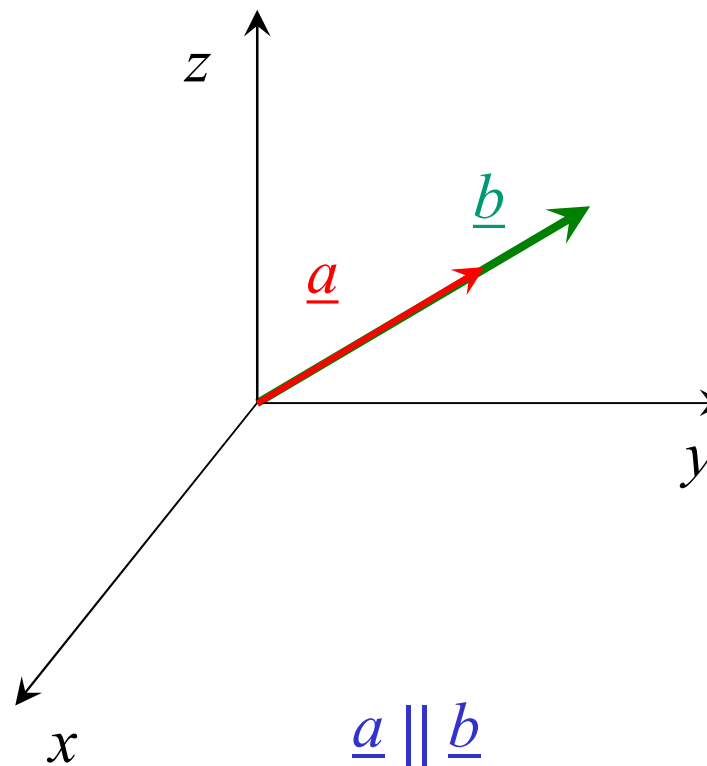
lineárisan összefüggő

Lin. függetlenség és összefüggőség geometriai szemléltetése az R^3 térben

- 2 vektor esetén



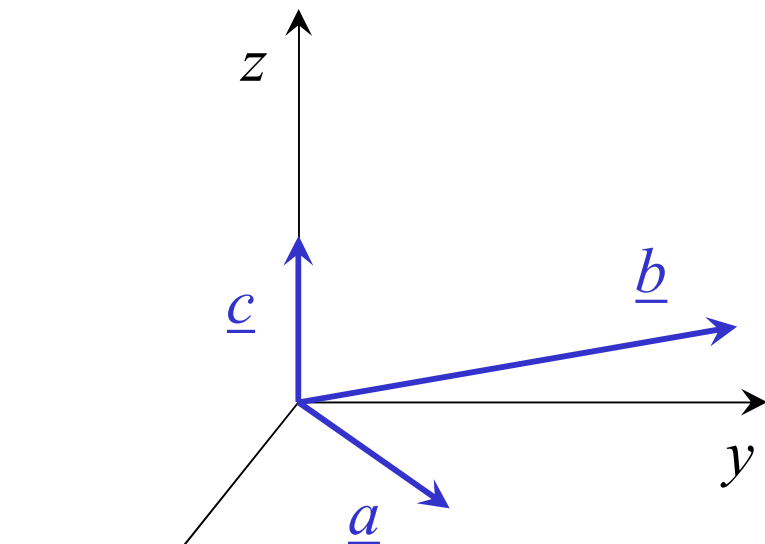
lineárisan független



lineárisan összefüggő

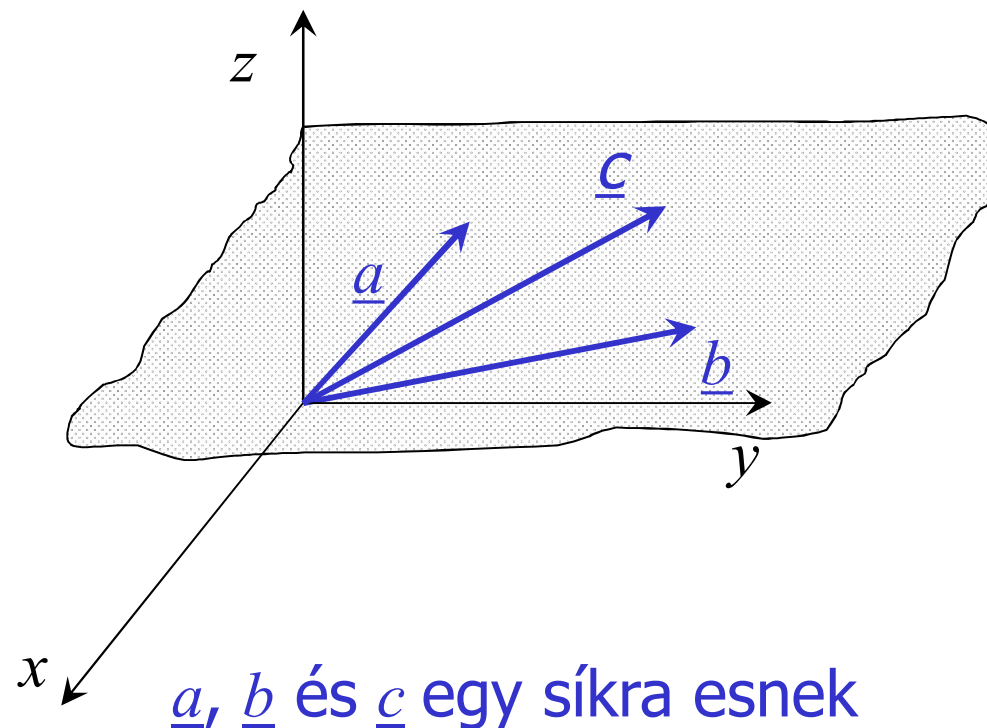
Lin. függetlenség és összefüggőség geometriai szemléltetése az R^3 térben

■ 3 vektor esetén



\underline{a} , \underline{b} és \underline{c} nem esnek egy síkra

lineárisan független



\underline{a} , \underline{b} és \underline{c} egy síkra esnek

lineárisan összefüggő



Lin. függetlenség és összefüggőség geometriai szemléltetése az R^3 térben

- 4 vagy több vektor esetén

Az R^3 térben 4 vagy több vektor mindig lineárisan összefüggő.



Lin. függetlenség ill. összefüggőség: állítások

1. Az $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k \in R^n$ vektorok pontosan akkor lineárisan összefüggők, ha valamelyikük előáll a többi vektor lineáris kombinációjaként.
2. Az $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k \in R^n$ vektorok pontosan akkor lineárisan függetlenek, ha egyikük sem áll elő a többi vektor lineáris kombinációjaként.
3. Az $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k \in R^n$ vektorok pontosan akkor lin. függetlenek, ha az R^n vektortér bármely vektora *legfeljebb* csak egy féle képpen áll elő az $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k$ vektorok lin. kombinációjával.
4. Ha egy vektorhalmazban szerepel a nullvektor, akkor az lineárisan összefüggő.
5. Lin. független vektorhalmaz részhalmaza is lin. független.
6. Lin. összefüggő vektorhalmazt bővítve az összefüggőség megőrződik.
7. Az R^n vektortérben $n+1$ db vektor mindig lin. összefüggő.



Vektorhalmaz rangja

- **Vektorhalmaz rangja:** Az $\{a_1, \dots, a_k\} \subseteq R^n$ vektorhalmaz rangja r , ha a vektorok közül kiválasztható r darab lin. független vektor, de bármely $r+1$ darab vektor már lin. összefüggő.
- **Megjegyzések:**
 - A rang megmutatja, hogy az adott vektorok közül maximálisan hány darab lin. független vektort tudunk kiválasztani.
 - Az R^n vektortérben bármely vektorhalmaz rangja kisebb vagy egyenlő, mint n .
 - Lineárisan független vektorhalmaz rangja megegyezik a vektorhalmazban lévő vektorok számával.



Generátorrendszer, bázis

- **Generátorrendszer:** Legyen $G \subseteq R^n$ egy vektorhalmaz. G generátorrendszer az R^n vektortérben, ha G elemeiből lineáris kombinációval az R^n vektortér bármely vektora előállítható.
- **Bázis:** Legyen $B \subseteq R^n$ egy vektorhalmaz, amely
 - lineárisan független és
 - generátorrendszer.

Ekkor a B -t az R^n vektortér egy bázisának hívjuk.



A kanonikus (standard) bázis

- Példa bázisra

kanonikus (standard) bázis:

$$\underline{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \quad \underline{e}_2 = (0, 1, \dots, 0), \quad \dots, \quad \underline{e}_n = (0, 0, \dots, 1)$$

- Megjegyzés

Egy $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ R^n -beli vektornak a kanonikus bázisra vonatkozó előállítása:

$$\underline{x} = x_1 \cdot \underline{e}_1 + x_2 \cdot \underline{e}_2 + \dots + x_n \cdot \underline{e}_n$$



Bázis, dimenzió, koordináták

Bázisokra vonatkozó állítások:

1. R^n -ben minden bázis ugyanannyi vektorból áll.
2. R^n -ben minden bázis n darab vektorból áll.
Ezt a számot hívjuk az R^n vektortér **dimenziójának**.
3. R^n -ben bármely n darab lineárisan független vektor bázist alkot.
4. Legyen $B = \{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n\}$ bázis R^n -ben. Ekkor bármely $\underline{x} \in R^n$ vektor *egyértelműen* előállítható a bázisvektorok lineáris kombinációjával:

$$\underline{x} = \lambda_1 \underline{b}_1 + \lambda_2 \underline{b}_2 + \dots + \lambda_n \underline{b}_n$$

Ekkor a $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ számokat az \underline{x} vektor B bázisra vonatkozó **koordinátáinak** nevezzük.

Megjegyzés: Bármely $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$ -beli vektornak a kanonikus bázisra vonatkozó koordinátái maguk a vektorkomponensek.



Elemi bázistranszformáció

- Elemi bázistranszformáció

Legyen $B = \{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n\}$ egy bázis R^n -ben, $\underline{c} \in R^n$,
 $\underline{c} \neq \underline{0}$.

Ekkor a B bázis vektorai között van olyan, amely kicserélhető a \underline{c} vektorral úgy, hogy a vektorcsere után is bázist kapjunk.

Az új bázisra vonatkozó koordináták számolásának algoritmusát elemi bázistranszformációnak nevezzük.

Az új koordináták számolása

- Legyen az \underline{x} vektor B bázisra vonatkozó előállítás:

$$\underline{x} = \lambda_1 \underline{b}_1 + \lambda_2 \underline{b}_2 + \dots + \lambda_n \underline{b}_n$$

Legyen a \underline{c} vektor B bázisra vonatkozó előállítás:

$$\underline{c} = \gamma_1 \underline{b}_1 + \gamma_2 \underline{b}_2 + \dots + \gamma_n \underline{b}_n$$

Tegyük fel, hogy $\gamma_i \neq 0$.

Cseréljük ki a B bázisban a \underline{b}_i vektort a \underline{c} vektorral.

Ekkor az \underline{x} vektor új bázisra vonatkozó koordinátái:

$$\hat{\lambda}_j = \lambda_j - \frac{\lambda_i \cdot \gamma_j}{\gamma_i} \quad j \neq i$$

$$\hat{\lambda}_i = \frac{\lambda_i}{\gamma_i} = \delta$$

Bázistranszformációs táblázat

- A régi és az új koordináták táblázatos elrendezése:

	<u>c</u>	<u>x</u>		<u>c</u>	<u>x</u>
<u>b</u> ₁	γ_1	λ_1	<u>b</u> ₁	0	$\lambda_1 - \delta \cdot \gamma_1$
<u>b</u> ₂	γ_2	λ_2	<u>b</u> ₂	0	$\lambda_2 - \delta \cdot \gamma_2$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
<u>b</u> _i	γ_i	λ_i	<u>c</u>	1	δ
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
<u>b</u> _n	γ_n	λ_n	<u>b</u> _n	0	$\lambda_n - \delta \cdot \gamma_n$

- A γ_i számot generálóelemnek hívjuk.



Alterek az R^n vektortérben

- **Altér:** A $H \subseteq R^n$ vektorhalmazt altérnek hívjuk az R^n vektortérben, ha bármely $\underline{a}, \underline{b} \in H$ vektorok és bármely $\lambda \in R$ esetén $\underline{a} + \underline{b} \in H$ és $\lambda \cdot \underline{a} \in H$ is teljesül.

H zárt a vektorműveletekre.

- **Triviális alterek**

A $H = \{\underline{0}\}$ és $H = R^n$ esetekben teljesül a fenti definíció, ezeket az altereket az R^n vektortér triviális (nem valódi) altereinek hívjuk.

- **Megjegyzések:**

- R^n minden altere tartalmazza a nullvektort.
- Alterekre is értelmezhető (analóg módon) a bázis és a dimenzió fogalma.



Alterek az R^3 térben

- $H = \{\underline{0}\}$: 0-dimenziós, triviális altér.
- Legyen $\underline{v} \in R^3$, $\underline{v} \neq \underline{0}$ rögzített.
 $H = \{\lambda \cdot \underline{v} \mid \lambda \in R\}$: origón átmenő, \underline{v} irányvektorú egyenesre eső vektorok összessége.
1-dimenziós altér.
- Legyen $\underline{a}, \underline{b} \in R^3$ két lineárisan független vektor.
 $H = \{\lambda_1 \cdot \underline{a} + \lambda_2 \cdot \underline{b} \mid \lambda_1, \lambda_2 \in R\}$: origón átmenő, az \underline{a} és \underline{b} vektorok által kifeszített síkra eső vektorok összessége. 2-dimenziós altér.
- $H = R^3$: 3-dimenziós, triviális altér.