

Többszörös Taylor-polinom

Elmélet

Definition 1 (Definíció) Legyen $f \in \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in \text{dom}(f)$ és f értelmezve van az az $(x_0, y_0) \in \text{dom}(f)$ valamely $K_\varepsilon(x_0, y_0)$ környezetében. Tegyük fel, hogy az f függvény 2-szer folytonosan differenciálható a $K_\varepsilon(x_0, y_0)$ környezetben. Ekkor a

$$\begin{aligned} T_{(x_0, y_0)}^2(f)(x, y) &= f(x_0, y_0) + D_1 f(x_0, y_0)(x - x_0) + D_2 f(x_0, y_0)(y - y_0) + \\ &+ \frac{D_1^2 f(x_0, y_0)(x - x_0)^2}{2} + \\ &+ \frac{D_1 D_2 f(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + D_2 D_1 f(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0)}{2} + \\ &+ \frac{D_2^2 f(x_0, y_0)(y - y_0)^2}{2} \end{aligned}$$

polinomot az f **függvény** 2. rendű (x_0, y_0) **körüli Taylor-polinomjának** nevezzük.

Feladatok

1. Legyen

$$f \in \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \sqrt{2x - y}.$$

Adja meg az $f(2, 3)$ -körüli másodrendű Taylor-polinomját!

2. Legyen

$$f \in \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \ln(x) - \frac{6y^2}{x} + y^2 - x.$$

Adja meg az $f(1, 1)$ -körüli másodrendű Taylor-polinomját!

3. Legyen

$$f \in \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \arctg(x - 2y).$$

Adja meg az $f(3, 1)$ -körüli másodrendű Taylor-polinomját!

4. Legyen

$$f \in \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \frac{2}{x} + \frac{5}{6} \ln(y) + 3xy + y.$$

Adja meg az $f(-1, 1)$ -körüli másodrendű Taylor-polinomját!

5. Legyen

$$f \in \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = -\frac{3}{y} - \frac{7}{6} \ln(x) - 2xy + x.$$

Adja meg az $f(1, -1)$ – körüli másodrendű Taylor-polinomját!

6. Legyen

$$f \in \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \frac{\sin(x)}{y^2}.$$

Adja meg az $f\left(\frac{\pi}{4}, -1\right)$ – körüli másodrendű Taylor-polinomját!

7. Legyen

$$f \in \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x^2 e^{2y}.$$

Adja meg az $f(2, 0)$ – körüli másodrendű Taylor-polinomját!

8. Legyen

$$f \in \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = (x + y^2) e^{x-2y}.$$

Adja meg az $f(-2, -1)$ – körüli másodrendű Taylor-polinomját!