Sorok

Elmélet

Definition 1 (Definíció) *Legyen adva egy* $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ *valós sorozat. A*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + ...$$

*végtelen összeget **végtelen sor**nak nevezzük. Az*

$$s_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k$$

összeget a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *sor* $n-$***edik részletösszeg****ének mondjuk. Ha az* $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ *sorozat konvergens, akkor a* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *végtelen sort is konvergensnek mondjuk, az*

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n$$

*véges határértéket pedig a **sor összegé**nek nevezzük, és ugyancsak a*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

szimbólummal jelöljük. Tehát

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} s_n = s$$

Ha az $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ *sorozat divergens, akkor a* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *sort is divergensnek mondjuk.*

Theorem 2 (Tétel) ***Műveletek konvergens sorokkal.*** *Ha a* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *és* $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ *sorok konvergensek és összegük* A *illetve* B, α *és* β *pedig valós számok, akkor a* $\sum_{k=0}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k)$*sor is konvergens, és összege* $\alpha A + \beta B$, *azaz*

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \beta \sum_{k=0}^{\infty} b_k = \alpha A + \beta B$$

Theorem 3 (Tétel) ***A konvergencia szükséges feltétele.***

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

sor konvergens, akkor

$$\lim_{nk\to\infty} a_k = 0$$

Definition 4 (Definíció) *A*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

*sort **abszolút konvergens**nek mondjuk, ha a*

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$$

sor konvergens. Ha a

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

*sor konvergens, de nem abszolút konvergens, akkor **feltételesen konvergens**nek nevezzük.*

A konvergens és abszolút konvergens sorok között a következő a kapcsolat.

Theorem 5 (Tétel) *Ha egy sor abszolút konvergens, akkor konvergens is.*

A tétel megfordítása nem igaz.

Konvergenciakritériumok

Elegendő feltételeket adunk végtelen sorok konvergenciájára vagy divergenciájára.

Theorem 6 (Tétel) ***Összehasonlító kritérium*** *Tekintsük a*

$$\sum_{k=l}^{\infty} a_k$$

és

$$\sum_{k=l}^{\infty} b_k$$

pozitív tagúsorokat.

a. *Ha*

$$0 < \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} < \infty,$$

akkor a kettő sor egyszerre konvergens vagy divergens.

b. *Ha*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0,$$

akkor a $\sum_{k=l}^{\infty} b_k$ *sor konvergenciájából következik a* $\sum_{k=l}^{\infty} a_k$ *sor konvergenciája.*

Theorem 7 (Tétel) ***Gyökkritérium*** *Tekintsük a*

$$\sum_{k=l}^{\infty} a_k$$

sort.

a. *Ha van olyan* $0 < q < 1$ *és* $k \in \mathbb{N}$*, amelyekre*

$$\sqrt[n]{|a_n|} \le q, \quad n \ge k,$$

akkor a sor abszolút konvergens.

b. *Ha végtelen sok $n-$re*

$$\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1,$$

akkor a sor divergens.

Theorem 8 (Tétel) ***Hányadoskritérium*** *Tekintsük a*

$$\sum_{k=l}^{\infty} a_k$$

sort.

a. *Ha van olyan $0 < q < 1$ és $k \in \mathbb{N}$, amelyekre*

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq q, \quad n \geq k,$$

akkor a sor abszolút konvergens.

b. *Ha végtelen sok $n-$re*

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \geq 1,$$

akkor a sor divergens.

Definition 9 (Definíció) *Azt mondjuk, hogy a*

$$\sum_{k=l}^{\infty} a_k$$

sor Leibniz-típusú, ha

1. *az $\{a_n\}$ sorozat jelváltó, azaz $a_n \cdot a_{n+1} < 0$, $n \geq l$,*

2. *az $\{|a_n|\}$ sorozat csökkenő,*

3. $a_n \to 0$.

Theorem 10 (Tétel) ***Leibniz-kritérium*** *Ha a*

$$\sum_{k=l}^{\infty} a_k$$

sor Leibniz-típusú, akkor konvergens, és $\sum_{k=l}^{\infty} a_k - \sum_{k=l}^{n} a_k$ a 0 és a_{n+1} között van.

Feladatok

1. Vizsgálja meg az alábbi sorok konvergenciáját!

(8 pont)

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1}$,

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n + arctg\,(n)}$,

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+nx}{n}\right)^n$, ahol $x \in \mathbb{R}$,

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+1}$,

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+2}$,

(f) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(1+2x)(1+3x)\ldots(1+nx)}{(x+2)(x+3)\ldots(x+n)}$, ahol $x > 0$,

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots (2n)}{4 \cdot 7 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot (3n+1)}$,

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+nx}{x+n}\right)^n$, ahol $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, -2, \ldots\}$,

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots (2n-1)}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot (3n)}$,

(j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(1+x)(1+2x)\ldots(1+nx)}$, ahol $x > 0$,

(k) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$,

(l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n}}{2n+1}$,

(m) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \arcsin\left(\frac{1}{n}\right)$,

(n) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}$,

(p) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^2+n} - n\right)^n$,

(q) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(n)\right)$

2. Konvergens-e az alábbi sor? Abszolút konvergens-e?

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\sqrt{n}}$, (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n + \operatorname{arctg}(n)}$, (c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+2}$.